

1. а) Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из них можно составить тетраэдр?

б) Докажите, что из шести ребер тетраэдра можно составить два треугольника.

в) Дан тетраэдр. Докажите, что из отрезков, длины которых равны проведению его противоположных ребер, можно составить треугольник.

2.  $O$  — основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром  $O$  касается всех боковых граней пирамиды. Точки  $A, B, C, D$  взяты последовательно по одной на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки  $AB, BC$  и  $CD$  проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок  $AD$  проходит через четвертую точку касания.

3. Стороны пространственного четырехугольника касаются сферы. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

4. Дана прямая  $l$  в пространстве и точка  $A$  вне прямой. Проведем через точку  $A$  произвольную прямую  $l_1$  и рассмотрим общий перпендикуляр  $MN$  к  $l$  и  $l_1$  ( $N$  лежит на  $l_1$ ). Найдите ГМТ  $N$ .

5. Можно ли так расположить восемь непересекающихся тетраэдров, чтобы любые два из них соприкасались по участку поверхности с ненулевой площадью?

6. Высота четырехугольной пирамиды  $SABCD$  проходит через точку пересечения диагоналей его основания  $ABCD$ . Из вершин основания опущены перпендикуляры  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  на прямые  $SC, SD, SA, SB$  соответственно. Оказалось, что точки  $S, A_1, B_1, C_1, D_1$  различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  проходят через одну точку.

7. В треугольной пирамиде  $ABCD$  все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках  $ABC, ABD, ACD$  лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер  $AB, AC, AD$ .

1. а) Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из них можно составить тетраэдр?  
б) Докажите, что из шести ребер тетраэдра можно составить два треугольника.  
с) Дан тетраэдр. Докажите, что из отрезков, длины которых равны произведению его противоположных ребер, можно составить треугольник.
2.  $O$  — основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром  $O$  касается всех боковых граней пирамиды. Точки  $A, B, C, D$  взяты последовательно по одной на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки  $AB, BC$  и  $CD$  проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок  $AD$  проходит через четвертую точку касания.
3. Стороны пространственного четырехугольника касаются сферы. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.
4. Дана прямая  $l$  в пространстве и точка  $A$  вне прямой. Проведем через точку  $A$  произвольную прямую  $l_1$  и рассмотрим общий перпендикуляр  $MN$  к  $l$  и  $l_1$  ( $N$  лежит на  $l_1$ ). Найдите ГМТ  $N$ .
5. Можно ли так расположить восемь непересекающихся тетраэдров, чтобы любые два из них соприкасались по участку поверхности с ненулевой площадью?
6. Высота четырехугольной пирамиды  $SABCD$  проходит через точку пересечения диагоналей его основания  $ABCD$ . Из вершин основания опущены перпендикуляры  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  на прямые  $SC, SD, SA, SB$  соответственно. Оказалось, что точки  $S, A_1, B_1, C_1, D_1$  различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  проходят через одну точку.
7. В треугольной пирамиде  $ABCD$  все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках  $ABC, ABD, ACD$  лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер  $AB, AC, AD$ .