Кружок в Хамовниках. 2015-2016 учебный год. 10 класс.

Домашнее задание на следующий год.

182(р). Можно ли множество натуральных чисел разбить на конечные подмножества $A_1, A_2, \ldots$ так, чтобы сумма чисел в подмножестве A_k была равна $k + 2015$.

183(р). Тридцать девочек – 13 в красных платьях и 17 в синих платьях – водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

184(р). На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём расстоянием между двумя точками длину меньшей дуги между ними. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более чем на n, увеличилось?

185. Из 239 неотличимых на вид монет две – одинаковые фальшивые, а остальные – одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее – фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно.

186. Назовем приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами *сносным*, если его корни – целые числа, а коэффициенты не превосходят по модулю 2013. Вася сложил все сносные квадратные трёхчлены. Докажите, что у него получился трёхчлен, не имеющий действительных корней.

187. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из каждого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что каждые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдётся город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдётся пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

188. В 6 коробках, выложенных лежит по одной монете. За один ход можно сделать одну из двух операций:

1) Убрать одну монету из коробки i $(i < 6)$ и положить 2 монеты в коробку $i + 1$;

2) Убрать одну монету из коробки i $(i < 5)$ и поменять содержимое коробок $i + 1$ и $i + 2$ местами.

a) Докажите, что нельзя получить суммарно сколь угодно много монет.

b) А можно ли получить в одной из коробок не менее 2014! монет?

189. Пусть $F(x)$ — некоторый многочлен. Обозначим $\Delta F = F(x+1) - F(x)$. Докажите, что для каждого многочлена $G(x)$ существует такой многочлен $H(x)$, что $G(x) = \Delta H$, причём этот многочлен единственный с точностью до прибавления константы.

190. Баба Яга закопала мешок с подарками на круглой поляне, на границе которой растут 6 ёлок. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого – с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, и закопан мешок. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки. Сколько раз Деду Морозу придётся копать, чтобы наверняка найти подарки?

191. Маша хочет от Деда Мороза в подарок коврик сложной формы. Но вот беда: Дед Мороз упал, ударился головой и забыл русский язык. Зато он помнит, что такое многочлен от двух переменных. Помогите Маше наладить общение с Дедушкой!

Формализация задания. а) На плоскости есть многоугольник M, не обязательно выпуклый. Докажите, что существует такой многочлен $P(x, y)$ с действительными коэффициентами, что множество точек (x, y) таких, что $P(x, y) < 0$ – фигура, симметрическая разность которой с внутренностью M имеет площадь, меньшую $0,001$ (эта фигура не обязана быть связной).

192. На полу лежат 2015 различных мешков, некоторые из которых вложены друг в друга. Дед Мороз может взять любой внешний (т.е. не лежащий ни в одном другом) мешок, выложить все мешки, которые находятся внутри, на пол, в все мешки с пола поместить внутрь. Какое количество различных расположений мешков можно получить?

193. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом друг друга в точке D и внутренним образом — окружности ω в точках E и F соответственно. Прямая t — общая касательная к ω_1 и ω_2 в точке D. Диаметр AB окружности ω перпендикулярен t, причем точки A, E и O_1 лежат по одну сторону от t. Докажите, что прямые AO_1, BO_2, EF и t пересекаются в одной точке.

194. (Была в прошлом году). При посадке в самолет выстроилась очередь из n пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из n мест. Первой в очереди стоит сумасшедшая старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на свое). Далее пассажиры по очереди занимают свои места, а в случае, если свое место уже занято, садятся случайным образом на одно из свободных мест. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

195. В стране есть 2015 городов и совсем нет дорог. Безумный министр транспорта приказывает построить 2015 дорог с односторонним движением, из каждого города по одной и в каждый город по одной, при этом он выбирает один из 2015! вариантов случайным образом.
а) С какой вероятностью из любого города можно будет добраться до любого?
б) С какой вероятностью между тремя фиксированными городами можно будет свободно перемещаться по дорогам?

196. В каждой точке плоскости записано вещественное число (то есть есть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$), причём в вершинах любого правильного пятиугольника сумма чисел – ноль. Докажите, что все числа – нули.