Кружок в Хамовниках. 2015-2016 учебный год. 10 класс.

Гробарий + домашнее задание на каникулы.

17. Не секрет, что иногда при умножении числа на 8 его сумма цифр уменьшается. Докажите, что она уменьшается не более, чем в 8 раз.

20. В клетки таблицы размером $m \times n$ записали различные действительные числа. Пусть $l \leqslant m$, $k \leqslant n$. В каждом столбце подчеркнули l наибольших чисел, а в каждой строке — k наибольших. Докажите, что по крайней мере kl чисел подчёркнуты дважды.

30. На бесконечном белом клетчатом листе бумаги n клеток покрасили в чёрный цвет. Каждую минуту каждая клетка K перекрашивается в цвет, в который покрашено хотя бы две из таких трёх клеток: сама клетка K, соседняя сверху и соседняя слева. Докажите, что не позднее, чем через n минут все клетки станут белыми.

55*. На доске написаны все 2^n различных последовательностей длины n, состоящих из чисел 1 или -1. После этого часть чисел заменили нулями. Докажите, что можно выбрать одну или несколько последовательностей так, что их сумма будет равна 0 (последовательности складываются почленно).

69. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел, из которой нельзя выбрать бесконечное число попарно взаимно простых чисел. Обязательно ли найдётся простое число, на которое делятся бесконечно много чисел последовательности?

71. В комнате n людей, некоторые знакомы между собой и у каждого хотя бы один знакомый (если A знает B, то B знает A). Назовём *общительностью* человека число его знакомых. Для каждого человека подсчитали среднее арифметическое общительностей его знакомых. Получили n чисел. Докажите, что их среднее арифметическое не меньше, чем среднее арифметическое общительностей.

72. В выпуклом шестиугольнике длины всех неглавных диагоналей не превосходят 1. Докажите, что найдётся главная диагональ, которая не длинее $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

85. На плоскости расположен $4n+1$ прямоугольник со сторонами, параллельными осям. Известно, что каждый прямоугольник пересекает хотя бы $3n$ других. Докажите, что есть прямоугольник, пересекающий все остальные.

87. На окружности радиуса 1 отмечено 60 точек. Докажите, что на этой же окружности найдётся точка, сумма расстояний от которой до отмеченных не более 80.

88. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, причём коэффицент при старшей степени равен 1. Оказалось, что для любого натурального n уравнение $P(x) = 2^n$ имеет натуральное решение. Докажите, что степень многочлена $P(x)$ равна 1.

98. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на невыпуклые четырёхугольники.

99. Не равные одновременно нулю целые числа a, b и c по модулю меньше, чем 10^6. Докажите неравенство $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}$.

101. На съезд собрались 5000 кинолюбителей, каждый видел хотя бы один фильм. Их делят на секции двух типов: либо обсуждение фильма, который все члены секции видели, либо каждый рассказывает о виденном фильме, который больше никто в секции не видел. Докажите, что всех можно разбить ровно на 100 секций. (Секции из одного человека разрешаются: он пишет отзыв о виденном фильме.)

102. Вершины правильного 45-угольника раскрашены в три цвета, причём вершин каждого цвета поровну. Докажите, что можно выбрать по три вершины каждого цвета так, чтобы три треугольника, образованные выбранными одноцветными вершинами, были равны.

97. Докажите, что с помощью одной только линейки нельзя построить биссектрису угла.

98. Дано биективное преобразование плоскости, для которого прообраз любой окружности есть окружность. Докажите, что это

а) аффинное преобразование;

б) преобразование подобия.

99. Дана бесконечная треугольная призма. У неё провели два сечения. Оказалось, что оба сечения являются правильными треугольниками. Докажите, что эти треугольники равны.

67. Дан выпуклый n-угольник без параллельных сторон. Для каждой стороны взяли самую далёкую вершину и посчитали угол, под которым она видна из той вершины. Чему равна сумма этих углов.

68. *(Снова из прошлого года).* На клетчатой плоскости отмечен один из узлов – точка O. Для каждой точки X плоскости определим $P_O(X)$ — количество узлов плоскости, которые ближе к X, чем точка O. Докажите, что множество точек, для которых $P_O(X) = 1000$ имеет площадь 1?

115. У неаккуратного лаборанта перепутались пометки пробирок, и среди n его пробирок с препаратами есть одна с ядом. У лаборанта есть 4 подопытных крысы. Каждый день в 10:00 каждой крысе можно сделать инъекцию со смесью содержимого нескольких пробирок. Если среди них была пробирка с ядом, крыса погибнет ровно в 17:00, иначе крыса выживет. Для какого наибольшего n за 4 дня гарантированно можно выяснить, в какой пробирке яд.

116. Из 123 неотличимых внешне монет ровно одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, а вес фальшивой отличается от веса настоящих. Докажите, что за 5 взвешиваний на чашечных весах нельзя гарантированно найти фальшивую монету.

109. Числа $x_1, x_2, \ldots x_n \in [-1, 1]$ удовлетворяют равенству $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$.
Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}$

166. Найдите все такие натуральные n, что число $\frac{10^n}{n^3+n^2+n+1}$ является целым.

167. Докажите, что у числа $a^{4^n} + a^{2^n} + 1$ не менее n различных простых делителей.

168. Пусть $n > 3$ — нечётное число. Докажите, что у числа $2^{\varphi(n)} - 1$ есть простой делитель, которого нет у числа n.

169. В какой степени входит двойка в разложение числа $C_{2^{k+1}}^{2^k} - C_{2^k}^{2^{k-1}}$ на простые множители?

138. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что нет трех городов, попарно соединенных дорогами. Кроме того, для любых n дорог найдется город, из которого выходят хотя бы две из них. Докажите, что города можно так разбить на n округов, чтобы любая дорога соединяла города из различных округов.

139. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2, касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β. Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD, расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

140. Дано натуральное n. Докажите, что существует такое натуральное $k < n$ (**Это исправление по сравнени с первоначальным вариантом**), что в десятичной записи числа kn используются не все цифры.

141. Найдите все такие непрерывные на всей действительной прямой функции $f(x)$, что $f(f(x)) + f(x) - 2x = 0$.

142. В двудольном графе $2^n - 1$ вершин, в каждой написано n различных чисел. Докажите, что можно оставить в каждой вершине одно число так, чтобы в концах каждого ребра стояли различные числа.