Серия 8. Комбинаторная геометрия. Теорема Хелли и не только. 1 октября.

56. На прямой дано несколько отрезков, любые два из которых пересекаются. Докажите, что тогда все отрезки пересекаются.

57. На плоскости расположено несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любые два прямоугольника пересекаются. Докажите, что есть точка, принадлежащая всем прямоугольникам. Осознайте, что если оси необязательно параллельны, то это утверждение неверно.

58. На плоскости расположены а) 4 б) 5 в) n выпуклых фигур. Известно, что любые 3 из них пересекаются. Докажите, что тогда все фигуры пересекаются. *(Небольшой привет задаче 9.4 с последнего всероса)*

Утверждение пункта в) называется **Теоремой Хелли для плоскости**.

59. Докажите, что если несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость, то из них можно оставить 3 так, чтобы они тоже всё покрывали.

60. На плоскости расположено несколько параллельных отрезков. Известно, что любые три можно пересечь прямой. Докажите, что тогда все отрезки можно пересечь прямой.

61. На плоскости расположено несколько точек. Оказалось, что любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса 1.

62. (Теорема Юнга) На плоскости даны n точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

63. На плоскости расположено несколько отрезков длины 1, любые два из которых пересекаются. Докажите, что их можно накрыть кругом радиуса $\sqrt{2}$.

64. Докажите, что выпуклый многоугольник площади S можно поместить в некоторый прямоугольник площади не более $2S$.

65. Площадь выпуклого многоугольника равна 1. Докажите, что внутри него есть треугольник площади хотя бы $\frac{1}{2}$.

66. На плоскости есть несколько единичных непересекающихся кругов. На каждой из окружностей, ограничивающей один из кругов, отметили точки, из которых не виден ни один другой круг. В результате на каждой окружности стало отмечено одна или несколько дуг (или ноль). Докажите, что суммарная длина этих дуг равна длине окружности.

67. Дан выпуклый n-угольник без параллельных сторон. Для каждой стороны взяли самую далёкую вершину и посчитали угол, под которым она видна из той вершины. Чему равна сумма этих углов.

68. *(Снова из прошлого года).* На клетчатой плоскости отмечен один из узлов – точка O. Для каждой точки X плоскости определим $P_O(X)$ — количество узлов плоскости, которые ближе к X, чем точка O. Докажите, что множество точек, для которых $P_O(X) = 1000$ имеет площадь 1?