Серия 41. uvw-метод.

Пример обречённый на немедленный разбор. Для действительных x, y, z докажите, что $(x^2+y^2+z^2)^3 \geqslant (x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$.

333. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$a^5+b^5+c^5+abc(ab+bc+ca) \geqslant a^2b^2(a+b)+a^2c^2(a+c)+b^2c^2(b+c).$$

334. Для положительных a, b, c выполнено $a+b+c=3$. Докажите, что

$$\frac{a+3}{3a+bc}+\frac{b+3}{3b+ca}+\frac{c+3}{3c+ab} \geqslant 3.$$

335. Если $a+b+c=3$, то какое наименьшее значение может принимать выражение $(3+2a^2)(3+2b^2)(3+2c^2)$?

336. (Летние сборы-2015, номер 5.3.) Даны положительные числа a,b,c,d, сумма квадратов которых равна 1. Докажите неравенство

$$a^3+b^3+c^3+d^3+abc+abd+acd+bcd \leqslant 1.$$

337. (Всероссийская олимпиада 2016.) Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 3.
а) Докажите, что

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

б) Докажите, что

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

338. Для положительных a, b, c выполнено $ab+bc+ca=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{2c+2ab+1}+\frac{1}{2b+2ac+1}+\frac{1}{2a+2bc+1} \geqslant 1$$