Кружок в Хамовниках. 2015-2016 учебный год. 10 класс.

Серия 40. Подсчёт числа способов.

327. Уголком из 5 клеток будем считать фигуру, полученную из квадрата 3×3 выкидыванием квадрата 2×2. Назовём раскраску клеток доски 8×8 в 3 цвета *хорошей*, если в каждом уголке из 5 клеток есть клетки всех цветов. Докажите, что хороших раскрасок больше, чем 6^8.

328. Докажите, что доску 12×12 можно разрезать на прямоугольники 1×2 более, чем 200 000 000 000 000 способов. (на самом деле их 53 060 477 521 960 000)

329. Миша увлекался кубиком Рубика и месяцы напролёт вращал его, получая различные комбинации.
а) Докажите, что общее число комбинаций, которое он получил, не превосходит $6! \times 8! \times 12! \times 3^8 \times 2^{12}$.
б*) Докажите, что общее число комбинаций, которые в принципе можно получиться,не делится на 13.

330. Обозначим $p(n, k)$ количество разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые, не превосходящие k (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми), а $p(n) = p(n, n)$ – общее количество разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые. Докажите, что $p(10000, 100)^2 \leqslant p(30000)$.

Пусть есть конечный алфавит.
Словом назовём любую последовательность символов этого алфавита.
Подпоследовательностью данного слова назовём слово, которое может получиться из данного зачёркиванием нескольких символов.
Подсловом данного слова назовём несколько подряд идущих символов данного слова.
К примеру у слова *aabbaa* слово *aba* является подпоследовательностью, но не является подсловом.

331. Рассмотрим слово s длины k. Рассмотрим все слова длины n, содержащие s в качестве подпоследовательности. Докажите, что их количество не зависит от того, какие символы входят в слово s, а зависит только от n и k (ну и от размера алфавита, конечно).

332. а) Убедитесь, что если считать вхождения в качестве подслов, а не подпоследовательностей, то задача перестанет быть верной.
б) Докажите, что слово, состоящее из k одинаковых букв является подсловом у небольшего числа слов длины n, чем любое другое длины k.