Серия 39. Разнобой.

318. Подберите без калькулятора целочисленное решение уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$, в котором x и $y > 1000$.

319. Есть брусок в виде очень призмы. Провели два его сечения плоскостями, не задевающими основания. Могли ли получиться а) два подобных неравных треугольника? б) два подобных неравных равносторонних треугольника?

320. Квадрокоптер парит в воздухе и имеет координаты $(100, 200, 300)$. Два игрока по очереди уменьшают одну из координат на 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Ни одна из координат не может стать отрицательной. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

321. Найдите количество таких пар натуральных $0 < n < m < 101$, что $m^2 - 1$ делится на n, а $n^2 - 1$ делится на m.

322. Имеется n лампочек и m кнопок. Каждую кнопку можно соединить с любыи лампочками контактом. Тогда при нажатии на какую-то кнопку меняют состояние все подключенные к ней лампочки. В начальный момент все лампочки выключены. а) Докажите, что если $n > m$ то найдутся набор состояний, который нельзя получить, нажимая на кнопки. b) Сколькими способами можно соединить кнопки с лампочками, чтобы можно было получить все возможные комбинации? (Лампочки занумерованы, кнопки тоже. Два способа считаются разными, если они различаются наличием (или отсутствием) хотя бы одного контакта между какой-то кнопкой и какой-то лампочкой). c) Тот же вопрос, но при $m > n$.

323. Есть бесконечная клетчатая полоса ширины 100 и несколько видов клетчатых фигурок, фигурок каждого вида бесконечное количество. Покажите, как можно определить за конечное время, можно ли покрыть всю полосу этими фигурками в один слой. Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать, но прикладывать их нужно строго по клеточкам.

324. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2.$$

325. Дан треугольник ABC и окружность Ω, пересекающая периметр треугольника в шести точках. A_1 и A_2 — точки пересечения Ω с BC, A_3 — точка пересечения касательных к Ω к точкам A_1 и A_2. Аналогично определяются B_3 и C_3. Докажите, что AA_3, BB_3 и CC_3 пересекаются в одной точке.

326. Дано простое число p. Пусть $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ —- многочлен с целыми коэффициентами от n переменных степени меньше n. Набор из n остатков назовём *корнем по модулю* p, если при подстановке этого набора вместо переменных получится ноль по модулю p. Докажите, что количество корней по модулю p у многочлена F делится на p в случае а) $p = 2$; б) общем случае.