Серия 38. Разнобой.

310. Коридор длины l покрыт конечным числом дорожек. Докажите, что можно убрать часть из них так, чтобы оставшиеся дорожки по-прежнему покрывали коридор и суммарная их длина не превышала бы $2l$.

311. Клетки таблицы $n \times n$ заполнены числами $1, 2, \ldots, n$ так, что каждое число встречается ровно n раз. Докажите, что в некоторой строчке или в некотором столбце встречается не менее $\sqrt{n}$ различных чисел.

312. Архитектор хочет расположить 7 высотных зданий так, чтобы, гуляя по городу, можно было увидеть их шпили в любом циклическом порядке. Удастся ли это ему?

313. Камни, сложенные в n куч, собрали и разложили в $n + k$ куч. Докажите, что не менее $k + 1$ камня оказались в кучках меньших, чем те, в которых они лежали.

314. Точка O — центр описанной окружности вписанного четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle AOC = \angle BAD = 110^\circ$ и $\angle ABC > \angle ADC$. Докажите, что $AB + AD > CD$.

315. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а отрезки AC и BD — в точке F. На луче EF отмечена точка P такая, что $\angle BPE = \angle CPE$. Докажите, что $\angle APB = \angle DPC$.

316. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Точка A' – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1 и CC_1. Аналогичным образом определяются точки B' и C'. Точки A', B', C' лежат внутри углов BAC, ABC, BCA соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

317. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке D. Отрезок BD повторно пересекает окружность в точке E. Точки F и G на окружности таковы, что $FE || BC$ и $GE || BA$. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников DEF и DEG, перпендикулярна биссектрисе угла B.