Серия 34. Целые гауссовы числа.

Целыми гауссовыми числами (или просто гауссовыми числами) называются комплексные числа, у которых и вещественная, и мнимая части – целые числа.

0. a) Нарисуйте, как выглядит множество целых гауссовых чисел на комплексной плоскости. Бывает полезна и обратная интерпретация: о точках плоскости можно думать как о комплексных числах.
b) Вспомним обозначения: $\mathbb{R}[x]$ – множество многочленов от переменной x; $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ – множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Придумайте логичное обозначение для целых гауссовых чисел.
c) Дайтее определение *гауссовых рациональных чисел* и покажите, что они являются *полем*, т.е. все четыре арифметические операции сохраняют это множество.

282. Напомним, что *модулем* комплексного числа $x+yi$ называется величина $\sqrt{x^2+y^2}$. Пусть $N(n)$ – количество целых гауссовых чисел с модулем, не превосходящим n.
a) Известно, что $N(n)$ растёт примерно как cn^2 для некоторой константы c. Чему равняется эта константа?
b) Если вы уже знаете формальное определение предела, докажите строго существование

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n^2}.$$

283. На плоскости нарисован треугольник с вершинами в целых точках, площадь треугольника равняется S. Докажите, что можно нарисовать подобный ему треугольник с вершинами в целых точах, имеющий площадь
a) $4S$; b) $2S$; c) $13S$.
d) Докажите, что такой треугольник площади $3S$ нарисовать нельзя.

284. На плоскости отмечено несколько точек. Для любых трех из них существует декартова система координат (т.е. перпендикулярные оси и общий масштаб), в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.

285. Пусть $M(n)$ – количество целочисленных решений уравнения $a^2+b^2=c^2$ таких, что $|c|<n$. Докажите, что существует число $\lambda>0$ такое, что для всех достаточно больших n выполнено $M(n)>\lambda n$.

Гауссово целое число называется *простым*, если его нельзя представить в виде произведения двух целых гауссовых чисел, отличных от ±1 и $\pm i$. Числа ±1 и $\pm i$ простыми не считаются.

279. Представьте число 2016 в виде произведения простых целых гауссовых чисел.

286. Докажите, что любое гауссово число u можно разделить с остатком на любое ненулевое гауссово число v, то есть представить в виде: $u = vq + r$, где частное q и остаток r — гауссовы числа, причём $|r| < |v|$.