Серия 28. Задачи на “можно или нельзя” в алгебре и теории чисел.

220. Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел (a, b, c), что $a^{15} + b^{15} = c^{16}$

221. Существуют ли такие натуральные числа $m, n > 1000000$, что $19m^3 - 84n^2 = 1984$?

222. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?

223. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что $x^2 - y^3 = 2015^{2016}$?

224. Докажите, что существует бесконечно много троек целых чисел (x, y, z) таких, что $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$.

225. а) Приведите пример такого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициента степени 3, что уравнения $P(x) = 0$ и $P(x) = a$ для некоторого целого ненулевого a имеют по 3 целых решения.

б) Приведите пример такого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициента степени 4, что уравнения $P(x) = 0$ и $P(x) = a$ для некоторого целого ненулевого a имеют по 4 целых решения.

226. Докажите, что существует бесконечно много троек (a, b, c) натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $2a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 2015$.

227. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, $\frac{a}{d} + \frac{c}{b} = 2008$?

228. Доказать, что существует бесконечно много таких пар (a, b) натуральных чисел, что $a^2 + 1$ делится на b, а $b^2 + 1$ делится на a.

229. Существует ли такое натуральное число n, что для любого натурального a число $a^n + n$ составное?

230. Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел $a > b > 1$, что $a^a + b$ делится на $b^b + a$.