Теорема Виета и симметрические многочлены.

Вы не думали, что эти старые задачи про это..

137. Сумма четырёх действительных чисел равна 0, и сумма их обратных величин равна 0. Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна 0.

110. Для вещественных x, y, z выполнено $x + y + z = 0$.
Докажите, что $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 \geqslant 6xyz$.

С кружка прошлого года

Упражнение1. Вещественные числа x, y, z таковы, что $x+y+z > 0$, $xy+yz+zx > 0$ и $xyz > 0$. Докажите, что все три числа положительны.

Упражнение2. Известно, что $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b, c равно 1.

С кружка прошлого года, но зачётные.

170. (Как бы зачётная задача.) Вещественные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Какое наименьшее значение может принимать $x^3 + y^3 + z^3$?

171. Как известно, многочлен $x^{2015} + y^{2015}$ представим в виде многочлена от xy и $x+y$. Чему равна сумма коэффицентов этого многочлена?

172. Как известно, симметрический многочлен можно представить как многочлен от основных симметрических. Докажите, что такое представление единственно.

173. Существует ли такое конечное множество M ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого действительны и также принадлежат M?

Новые задачи.

174(р). Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней.

175. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a, b, c уравнения $x^3+ax^2+bx + c$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

176. Петя загадал три числа. После чего сообщил Васе их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Всегда ли Вася по этим данным однозначно сможет восстановить исходные числа?

177. Та же задача, но Петя сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней.

178*. Та же задача, но чисел было n, а Петя сказал сумму всех степеней вплоть до n-ых.

Назовём число *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами.

179. а) Докажите, что сумма, произведение, частное двух алгебраических чисел (в случае частного, делитель не равен 0) тоже является алгебраическим числом.
б) Докажите, что корень многочлена с алгебраическими коэффициентами тоже является алгебраическим числом.

180. Ваня выписал на доске несколько комплексных чисел. Оказалось, что сумма любых их степеней одна и та же. (То есть у этих чисел сумма равна сумме квадратов, сумме кубов и тд.) Докажите, что все эти суммы целые.

181. Все корни (в том числе и комплексные) многочлена с целыми коэффициентами по модулю не превосходят 1. Докажите, что все эти корни являются корнями из единицы.