

Простые делители и не только.

159(р). Найдите все значения a , при которых число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым для любого натурального n .

160(р). а) Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доске числа $1+a, 1+a^2, 1+a^3, \dots, 1+a^{15}$. Затем стёр несколько чисел так, чтобы оставшиеся на доске числа были взаимно простыми. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

б) Та же задача, но a выбирается больше 1000.

161(р). Натуральные числа $a, b, c > 1$ таковы, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел $a+c$ или $b+c$ составное.

162(р). Найдите все такие натуральные k , что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k .

163(р). Даны натуральные числа a, b, c взаимно простые в совокупности. Всегда ли можно подобрать такое n , что $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n ни при каком натуральном k ?

164. Докажите, что число $4^n + 6^n + 9^n$ не является точным квадратом ни при каких натуральных n .

165. Найдите все такие натуральные k и l , что число $5^k 43^l + 1$ является точным кубом.

166. Найдите все такие натуральные n , что число $\frac{10^n}{n^3+n^2+n+1}$ является целым.

167. Докажите, что у числа $a^{4^n} + a^{2^n} + 1$ не менее n различных простых делителей.

168. Пусть $n > 3$ — нечётное число. Докажите, что у числа $2^{\varphi(n)} - 1$ есть простой делитель, которого нет у числа n .

169. В какой степени входит двойка в разложение числа $C_{2^{k+1}}^{2^k} - C_{2^k}^{2^{k-1}}$ на простые множители?