

Восстановительный разнобой.

132. Существует ли возрастающая последовательность a_1, a_2, \dots натуральных чисел такая, что для любого натурального k последовательность $a_1 + k, a_2 + k, \dots$, содержит конечное количество простых чисел?

133. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b , что $3^a + 7^b$ полный квадрат.

134. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности. Через точки A и C проведена окружность, касающаяся AO и CO . Докажите, что вторые точки пересечения прямых BA и BC с этой окружностью являются концами ее диаметра.

135. На плоскости проведено 12 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?

136. Какое наибольшее количество троек (a, b, c) с условием $a < b < c$ можно составить из чисел $1, 2, \dots, n$ так, чтобы для любых двух составленных троек (a, b, c) и (a', b', c') выполнялось не более одного из равенств $a = a', b = b', c = c'$?

137. Сумма четырёх действительных чисел равна 0, и сумма их обратных величин равна 0. Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна 0.

138. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что нет трех городов, попарно соединенных дорогами. Кроме того, для любых n дорог найдется город, из которого выходят хотя бы две из них. Докажите, что города можно так разбить на n округов, чтобы любая дорога соединяла города из различных округов.

139. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2 , касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β . Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD , расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α . Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

140. Дано натуральное n . Докажите, что существует такое натуральное k , что в десятичной записи числа kn используются не все цифры.

141. Найдите все такие непрерывные на всей действительной прямой функции $f(x)$, что $f(f(x)) + f(x) - 2x = 0$.

142. В двудольном графе $2^n - 1$ вершин, в каждой написано n различных чисел. Докажите, что можно оставить в каждой вершине одно число так, чтобы в концах каждого ребра стояли различные числа.