# Серия 17-18. Геометрия.

**117.** В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.

**118.** На сторонах $BC, CA, AB$ треугольника $ABC$ нашлись такие точки $D, E, F$, что центр вписанной окружности треугольника $DEF$ совпадает с центром вписанной окружности $ABC$, а радиус в 2 раза меньше. Докажите, что тогда $ABC$ — правильный.

**119.** На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ выбраны соответственно точки $K$, $L$ и $M$. Оказалось, что радиусы описанных окружностей треугольников $AKM$, $BKL$, $CLM$ и $KLM$ равны. Докажите, что треугольники $ABC$ и $KLM$ подобны.

**120.** Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка $X$ и через нее проведены отрезки $PQ$ и $EF$, параллельные сторонам квадрата $AD$ и $AB$ соответственно, с концами, лежащими на сторонах квадрата ($P$ на $AB$, $F$ на $AD$). Оказалось, что $S_{ECQX} = 2S_{PXFA}$. Чему равен $\angle EAQ$?

**121.** Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол $ABC$ тупой. Прямая $AD$ пересекает второй раз окружность $\omega$, описанную вокруг треугольника $ABC$, в точке $E$. Прямая $CD$ пересекает второй раз окружность $\omega$ в точке $F$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $DEF$ лежит на окружности $\omega$.

**122.** Окружность с центром $O$ вписана в четырёхугольник $ABCD$ и касается его не параллельных сторон $BC$ и $AD$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Пусть прямая $AO$ и отрезок $EF$ пересекаются в точке $K$, прямая $DO$ и отрезок $EF$ — в точке $N$, а прямые $BK$ и $CN$ — в точке $M$. Докажите, что точки $O$, $K$, $M$ и $N$ лежат на одной окружности.

**123.** Центры окружностей $S_1$, $S_2$ и $S_3$ лежат на одной прямой, причем $S_1$ и $S_2$ не пересекаются, а $S_3$ внешним образом касаются двух других окружностей. Докажите, что окружность $S_3$ пересекает общие внутренние касательные к $S_1$ и $S_2$ в четырех точках, образующих четырехугольник, две стороны которого параллельны общим внешним касательным к $S_1$ и $S_2$.

**124.** Окружность проходит через вершины $A$ и $B$ четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны $BC$ и $AD$ в точках $P$ и $Q$, а диагонали $AC$ и $BD$ в точках $M$ и $N$. Докажите, что прямые $PQ$, $MN$ и $CD$ конкурентны.

**125.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны равны соответственно: $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$, $AD = 5$. Найдите угол между его диагоналями.

**126.** Дан параллелограмм $ABCD$. Вписанные окружности треугольников $ABC$ и $ADC$ касаются диагонали $AC$ в точках $X$ и $Y$. Вписанные окружности треугольников $BCD$ и $BAD$ касаются диагонали $BD$ в точках $Z$ и $T$. Докажите, что если все точки $X$, $Y$, $Z$, $T$ различны, то они являются вершинами прямоугольника.

**127.** Биссектрисы углов $A$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекают описанную около него окружность в точках $E$ и $D$ соответственно. Отрезок $DE$ пересекает стороны $AB$ и $BC$ соответственно в точках $F$ и $G$. Пусть $I$ — точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$. Докажите, что четырехугольник $BFIG$ — ромб.

**128.** Биссектриисы $AA_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $I$. Описанные окружности треугольников $AIC_1$ и $CIA_1$ повторно пересекают дуги $AC$ и $BC$ (не содержащие точек $B$ и $A$ соответственно) описанной окружности треугольника $ABC$ в точках $C_2$ и $A_2$ соответственно. Докажите, что прямые $A_1A_2$ и $C_1C_2$ пересекаются на описанной окружности треугольника $ABC$.

**129.** В треугольнике $ABC$ точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — основания высот из вершин $A$, $B$, $C$, точки $C_A$ и $C_B$ — проекции $C_1$ на $AC$ и $BC$ соответственно. Докажите, что прямая $C_AC_B$ делит пополам отрезки $C_1A_1$ и $C_1B_1$.

**130.** (подсказка для задачи 122) В треугольнике $ABC$ вписанная окружность касается его сторон $AB$ и $BC$ в точках $C_1$ и $A_1$ соответственно. Биссектриса угла $A$ пересекает прямую $A_1C_1$ в точке $X$.

Докажите, что $\angle AXC = 90°$.

Сформуируйте и докажите аналогичное утверждение про вневписанную окружность.

**131.** Дан треугольник $ABC$ и прямая $l$, касающаяся вписанной в него окружности. Обозначим через $l_a$, $l_b$, $l_c$ прямые, симметричные $l$ относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику $ABC$.