

Серия 15. Неравенства с условиями.

104. Сумма положительных a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{1+4a} + \sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4c} + \sqrt{1+4d} \leq 6.$$

105. Сумма положительных a, b, c равна 3. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5 \geq 3$.

106. Положительные a, b, c удовлетворяют тождеству $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$2(a + b + c) \geq \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1}.$$

107. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$

108. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что $a + b + c \leq 3$.

109. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$ удовлетворяют равенству $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$.

Докажите, что $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3}$

110. Для вещественных x, y, z выполнено $x + y + z = 0$.

Докажите, что $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 \geq 6xyz$.

Серия 15. Неравенства с условиями.

104. Сумма положительных a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{1+4a} + \sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4c} + \sqrt{1+4d} \leq 6.$$

105. Сумма положительных a, b, c равна 3. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5 \geq 3$.

106. Положительные a, b, c удовлетворяют тождеству $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$2(a + b + c) \geq \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1}.$$

107. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$

108. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что $a + b + c \leq 3$.

109. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$ удовлетворяют равенству $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$.

Докажите, что $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3}$

110. Для вещественных x, y, z выполнено $x + y + z = 0$.

Докажите, что $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 \geq 6xyz$.