Серия 11. Уравнения Пелля.

73. Имеют ли решения в целых числах при $x, y > 1$ следующие уравнения:
а) $x^2 - 3y^2 = 1$;
б) $7x^2 - y^2 = 1$;
в)$x^2 - 7y^2 = 1$?

74. Найдите общий вид целых решений уравнения $13x + 100y = 3$.

Здесь и далее n не является квадратом натурального числа. Рассмотрим числовое поле $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$, состоящее из чисел вида $x + y\sqrt{n}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$. Введём в этом числовом поле *норму* $N(x + y\sqrt{n}) = x^2 - ny^2$.

75. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. Докажите, что $N(ab) = N(a)N(b)$ и $N(a/b) = N(a)/N(b)$

Элементы $x + y\sqrt{n}$, у которых $x, y \in \mathbb{Z}$, будем называть *целыми* элементами числового поля, а их множество обозначать $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

76. Назовём элемент $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ *обратимым*, если все целые элементы при делении на a остаются целыми. Как связаны обратимость целого элемента и его норма?

Уравнение $x^2 - ny^2 = 1$ будем называть *уравнением Пелля.*

77. Пусть пара (x_0, y_0), отдичная от $(1; 0)$, является решением уравнения Пелля. Докажите, что у этого уравнения бесконечно много целых решений.

78. Пусть $t = 3 + 2\sqrt{2}$. Докажите, что все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ имеют вид $\pm t^k$ при целых k.

79. Докажите, что в $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ все обратимые элементы являются $\pm$ целыми степенями одного из них.

80. Пусть $x_1 + y_1\sqrt{n}$ и $x_2 + y_2\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, $m = N(x_2 + y_2\sqrt{n})$,
$x_1 \equiv x_2 \mod m$ и $y_1 \equiv y_2 \mod m$.
Докажите, что $x_1 + y_1\sqrt{n}$ делится на $x_2 + y_2\sqrt{n}$ «нацело».

81. *(Теорема Минковского о выпуклом теле.)* На плоскости нарисован выпуклый центрально симметричный многоугольник с центром в точке $(0; 0)$. Площадь многоугольника больше четырёх. Докажите, что внутри него есть ещё хотя бы одна целая точка.

82. Пусть n – не квадрат целого числа. Каждая точка плоскости лежит на одной из кривых вида $x^2 - ny^2 = d$ для некоторого d. Докажите, что на одной из этих кривых бесконечно много целых точек.

83. Докажите, что любое уравнение Пелля имеет бесконечно много решений.