Серия 13. Аффинные преобразования.

Определение. Преобразование f, определённое на всех точках плоскости, называется *аффинным*, если выполнено следующее:

1. f биективно, то есть в каждую точку переходит ровно одна точка;
2. Для любой тройки точек A, B, C, лежащих на одной прямой, точки $f(A), f(B), f(C)$ тоже лежат на одной прямой.

Примеры преобразований, являющихся аффинными:

- движение плоскости;
- гомотетия;
- сжатие (растяжение) к прямой. Это преобразование определяется так: пусть дана прямая l и произвольное ненулевое число α. Тогда для каждой точки X определена точка $\pi(X)$ – проекция X на l, а преобразование сжатия имеет вид $f(X) = \pi(X) + \alpha(X - \pi(X))$.
- параллельное ппроектирование в пространстве.

89. а) Пусть f и g – аффинные преобразования. Обязательно ли их композиция является аффинным преобразованием?
б) Пусть f – аффинное преобразование. Обязательно ли обратное к f преобразование является аффинным?
в) Является ли аффинным преобразованием преобразование, заданное формулой $f(x, y) = (3x + 4y + 1, 5x + 6y + 1)$?
г) Является ли аффинным преобразованием преобразование, заданное формулой $f(x, y) = (x - y, 2x - 2y - 1)$?

90. Пусть f — аффинное преобразование.
а) Докажите, что образом прямой является прямая (а не некоторое её подмножество).
б) Докажите, что f переводит параллельные прямые в параллельные.
в) Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$. Тем самым можно корректно задать соответствующее отображение φ на векторах плоскости.

Обозначения f и φ сохраним и на следующие задачи.

91. Пусть прямая l под действием f переходит в l_1 и $A, B \in l$. Введём на каждой из прямых координаты так, чтобы у A и $f(A)$ координаты были 0, а у B и $f(B)$ — 1. Тогда f задаёт некоторую биекцию вещественной прямой — отображение F. Докажите, что для любых a и b:
а) $F(a + b) = F(a) + F(b)$;
б) $F(ab) = F(a)F(b)$.
в) Докажите, что тогда $F(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

92. (Бесплатное следствие.) а)Докажите, что $\varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$ и $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.
б) Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения длин отрезков на прямой.

93. Докажите, что любое аффинное преобразование является композицией сжатий к прямым, движений и гомотетий.

94. Посмотрите на последние пункты задачи 89 и найдите общий вид аффинных преобразований в координатах.

95. Дано биективное преобразование плоскости, для которого прообраз любой окружности есть окружность. Докажите, что это
а) аффинное преобразование;
б) преобразование подобия.

96. На плоскости нарисован угол. Докажите, что с помощью одной лишь линейки нельзя построить биссектрису этого угла.

97. Дана треугольная призма. В ней провели два сечения, не пересекающие основания. Оказалось, что оба сечения являются правильными треугольниками. Докажите, что эти треугольники равны.