Все домашние задания.

17. Не секрет, что иногда при умножении числа на 8 его сумма цифр уменьшается. Докажите, что она уменьшается не более, чем в 8 раз.

18. Есть таблица 8×8 и карточки с числами от 1 до 64. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма четна — выигрывает первый игрок, а если нечетна — второй. Кто выиграет при правильной игре?

19. Сколько разных остатков может давать число 2^n при делении на 3^{100}?

20. В клетки таблицы размером $m \times n$ записали различные действительные числа. Пусть $l \leqslant m$, $k \leqslant n$. В каждом столбце подчеркнули l наибольших чисел, а в каждой строке — k наибольших. Докажите, что по крайней мере kl чисел подчёркнуты дважды.

28. Пусть p — простое число, а $0 < l < p^k$. Докажите, что $C_{p^k}^l$ делится на l.

29. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ $AB \cdot BC = 2AD \cdot DC$. Докажите, что $8BD^2 \leqslant 9AC^2$.

30. На бесконечном белом клетчатом листе бумаги n клеток покрасили в чёрный цвет. Каждую минуту каждая клетка K перекрашивается в цвет, в который покрашено хотя бы две из таких трёх клеток: сама клетка K, соседняя сверху и соседняя слева. Докажите, что не позднее, чем через n минут все клетки станут белыми.

31. Найдите все такие простые p и натуральные k, что $p^2 - p + 1 = k^3$.

51. Используя только символы $+-=()x\oplus 1$, запишите равенство, которое выполняется тогда и только тогда, когда x – степень двойки. Символ $\oplus$ обозначает побитовую сумму; разрешается использовать символы больше чем по одному разу или не использовать вовсе, но символы не из списка запрещены.

52. Решите уравнение в натуральных числах: $3^x = 2^x y + 1$.

53. Найдите без помощи электронных вычислительных устройств первые 10 цифр после запятой числа $(1+\sqrt{2})^{1000}$.

54. Восстановите с помощью циркуля и линейки остроугольный треугольник по ортоцентру и серединам двух сторон.

55*. На доске написаны все 2^n различных последовательностей длины n, состоящих из чисел 1 или -1. После этого часть чисел заменили нулями. Докажите, что можно выбрать одну или несколько последовательностей так, что их сумма будет равна 0 (последовательности складываются почленно).

69. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел, из которой нельзя выбрать бесконечное число попарно взаимно простых чисел. Обязательно ли найдётся простое число, на которое делятся бесконечно много чисел последовательности?

70. Многочлен $x^2 + 2x + 6$ можно разложить на множители по модулю 7:

$$x^2 + 2x + 6 \equiv (x+4)(x+5) \mod 7.$$

Разложите на неприводимые множители по модулю 7 многочлен $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$.

71. В комнате n людей, некоторые знакомы между собой и у каждого хотя бы один знакомый (если A знает B, то B знает A). Назовём *общительностью* человека число его знакомых. Для каждого человека подсчитали среднее арифметическое общительностей его знакомых. Получили n чисел. Докажите, что их среднее арифметическое не меньше, чем среднее арифметическое общительностей.

72. В выпуклом шестиугольнике длины всех неглавных диагоналей не превосходят 1. Докажите, что найдётся главная диагональ, которая не длинее $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

84. Назовём *белыми* числа вида $\sqrt{a + b\sqrt{2}}$, где a и b целые, отличные от нуля. Назовём *чёрными* числа вида $\sqrt{c + d\sqrt{7}}$, где c и d — целые и не равны нулю. Может ли сумма нескольких белых чисел быть равна чёрному числу?

85. На плоскости расположен $4n + 1$ прямоугольник со сторонами, параллельными осям. Известно, что каждый прямоугольник пересекает хотя бы $3n$ других. Докажите, что есть прямоугольник, пересекающий все остальные.

86. Какое наибольшее количество различных трёхэлементных подмножеств можно выбрать из 100-элементного множества так, что никакие два из них не пересекались бы ровно по одному элементу?

87. На окружности радиуса 1 отмечено 60 точек. Докажите, что на этой же окружности найдётся точка, сумма расстояний от которой до отмеченных не более 80.

88. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, причём коэффицент при старшей степени равен 1. Оказалось, что для любого натурального n уравнение $P(x) = 2^n$ имеет натуральное решение. Докажите, что степень многочлена $P(x)$ равна 1.

98. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на невыпуклые четырёхугольники.

99. Не равные одновременно нулю целые числа a, b и c по модулю меньше, чем 10^6. Докажите неравенство $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}$.

100. Дано 41 различное натуральное число, меньшее 1000. Известно, что среди любых трех из них есть два, дающих в произведении точный квадрат. Докажите, что среди этих чисел есть точный квадрат.

101. На съезд собрались 5000 кинолюбителей, каждый видел хотя бы один фильм. Их делят на секции двух типов: либо обсуждение фильма, который все члены секции видели, либо каждый рассказывает о виденном фильме, который больше никто в секции не видел. Докажите, что всех можно разбить ровно на 100 секций. (Секции из одного человека разрешаются: он пишет отзыв о виденном фильме.)

102. Вершины правильного 45-угольника раскрашены в три цвета, причём вершин каждого цвета поровну. Докажите, что можно выбрать по три вершины каждого цвета так, чтобы три треугольника, образованные выбранными одноцветными вершинами, были равны.

103. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На луче BO выбрана точка P. Описанные окружности треугольников CPB и APB пересекают стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что середина отрезка KL равноудалена от вершин A и C.