

Серия 26. Ещё более мудрые мудрецы.

208. Предположим, что мудрецы разбиты на две группы, и на голову каждого мудреца надела шляпа одного из 10 цветов. Каждый мудрец видит цвета шляп мудрецов из другой группы и не видит цвета шляп из своей, все одновременно пытаются угадать свой цвет, предварительно обсудив стратегию.

а) Докажите, что если в одной из групп 8 мудрецов или меньше, то у них это не получится.

б) Докажите, что если в одной из групп 9 мудрецов, а в другой – 10^{10^9} , то у них есть совместная стратегия.

209. Четыре мудреца стоят по кругу, у них шляпы трёх цветов, каждый видит шляпы соседей, но не видит шляпу стоящего напротив. Есть ли у них стратегия, позволяющая хотя бы одному угадать свой цвет?

210. Ста мудрецам на лбу пишутся попарно различные числа. После этого все мудрецы должны одновременно поднять одну из рук – либо правую, либо левую. Как им действовать, чтобы у любых двух мудрецов с соседними числами оказались подняты разные руки?

Назовём числа соседними, если они соседние после упорядочивания по возрастанию. Сами мудрецы не знают, какие из видимых ими чисел соседние.

211. В тюрьме сидят 10 заключенных, каждый — в одиночной камере. Общаться между собой они не могут. В один прекрасный день начальник тюрьмы объявил им, что предоставляет всем шанс выйти на свободу на следующих условиях:

«В подвале тюрьмы есть комната с переключателем, имеющим два состояния: ON и OFF («вкл.» и «выкл.»). Каждую ночь я буду приводить в эту комнату ровно одного заключенного (выбирая его абсолютно случайно) и через некоторое время уводить. Находясь в комнате, каждый из вас может либо изменить положение переключателя, либо ничего с ним не делать. Персонал тюрьмы трогать этот переключатель не будет. В какой-то момент один из вас (любой) должен понять, что в комнате побывали все заключенные, и сообщить об этом. Если он окажется прав — всех отпустят, если ошибется — все вы навсегда останетесь в тюрьме. Я обещаю, что в комнате побывают все заключенные, причём каждого будут приводить туда неограниченное число раз».

После этого заключенным разрешили собраться и обсудить стратегию действий, а потом развели обратно по камерам.

Могут ли заключенные гарантированно выйти на свободу, и если да, то как им этого добиться?

212. (Код Хемминга.) Один мудрец хочет передать второму число от 1 до 16. Для этого он одновременно посылает ему несколько различных воронов, у каждого ворона на лапке либо красная ленточка, либо синяя. К сожалению, четвертья воронами нельзя обойтись, так как злая колдунья может поймать одного ворона и подменить цвет ленточки (а может никого не ловить). Докажите, что семи воронов с ленточками хватит.

Разумеется, мудрецы могут заранее договориться о способе кодирования информации.

213. а) Дракон поймал трёх мудрецов и устраивает им испытание: на голову каждому он надевает шапочку одного из двух цветов (т.е. всего 8 равновероятных возможностей), каждый мудрец видит две чужие шапки и не видит свою. После этого каждый по команде может назвать цвет (а может и не называть ничего). После этого дракон отпускает мудрецов, если были правильные ответы и не было неправильных, а в противном случае – сжирает. Как им договориться перед процедурой, чтобы максимизировать вероятность спасения?

б) А что делать, если мудрецов 7?