

Серия 25. Информация и кооперативные стратегии.

197. В одном городе жили мудрецы и их жёны. Каждое утро мудрецы собирались на базаре и обменивались новостями. А поскольку они любили сплетничать, каждый из них знал, у кого из мудрецов жена верная, а у кого — нет. Но про собственных жён мудрецы этого не знали, ибо у них была традиция: не обсуждать ни с кем его жену. Поэтому каждый мудрец считал, что уж его-то жена — верная. Если же мудрец каким бы то ни было образом узнавал, что жена ему неверна, он её выгонял из дома в ту же ночь.

Однажды на базар явился чужестранец и во всеуслышание заявил: «Ба! да в этом городе есть неверные жёны!» «Тоже мне новость!» — подумали мудрецы и разошлись по домам. Однако слова чужестранца не остались незамеченными, и через некоторое время все неверные жены были изгнаны. На какой день то случится, если всего было 30 мудрецов с верными жёнами и 20 — с неверными?

198. У некоторого султана было два мудреца: Али и Бали. Желая убедиться в их мудрости, султан призвал мудрецов к себе и сказал: «Я задумал два числа. Оба они целые, каждое больше единицы, но меньше ста. Я перемножил эти числа и результат сообщу Али и при этом Вали я скажу сумму этих чисел. Если вы и вправду так мудры, как о вас говорят, то сможете узнать исходные числа». Султан сказал Али произведение, а Вали — сумму. Мудрецы задумались. Первым нарушил молчание Али. — Я не знаю этих чисел, — сказал он, опуская голову. — Я это знал, — подал голос Вали. — Тогда я знаю эти числа, — обрадовался Али. — Тогда и я знаю! — воскликнул Вали. И мудрецы сообщили пораженному султану задуманные им числа. Назовите эти числа.

Фокусы.

199. Фокусник с завязанными глазами выдает зрителю 5 карточек с номерами от 1 до 5. Зритель прячет две карточки, а три отдает ассистенту фокусника. Ассистент указывает зрителю на две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался?

200. Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.

201. При каком наименьшем N возможен такой фокус? Помощник фокусника просит одного из зрителей написать на доске в ряд N цифр. Затем помощник фокусника стирает одну из них и покидает помещение. После этого появляется фокусник. Глядя на оставшиеся цифры, фокусник безошибочно отгадывает, какая цифра была стёрта. (Фокусник и его помощник заранее выбирают число N так, как им удобно; фокусник видит, на каком месте стояла стёртая цифра. Любые способы скрытой коммуникации, кроме явно оговоренных в задаче, запрещены.)

202. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие — орлом вверх, а какие — решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое целое число от 1 до N и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число.

а) Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способ, позволяющий фокуснику

гарантированно отгадывать число для $N = k$, то есть способ и для $N = 2k$.

б) Найдите все значения N , для которых у фокусника с ассистентом есть такой способ.

Угадывание шапок.

203. а) Алисе и Бобу надевают на голову шляпу. Каждая из шляп может быть черной или белой. Каждый видит чужую шляпу, но никто не видит при этом своей шляпы. Каждый (не подглядывая, не общаясь и не подавая друг другу никаких сигналов) должен попытаться угадать цвет своей шляпы. Для этого по команде одновременно каждый из них должен назвать цвет — «черный» или «белый». Если хоть один из них угадал — они выиграли. Перед тем как всё это произойдет, им дали возможность посоветоваться. Как им следует действовать, чтобы в любой ситуации выиграть?

б) А удалось ли бы им выиграть, если бы цветов было три, а не два?

в) То же самое, но число цветов увеличивается до четырёх, а к Алисе и Бобу присоединяются Вика и Гена.

г) Докажите, что из n людей при n цветах можно договориться так, чтобы хотя бы один угадал.

д) А если цветов больше, чем людей — то нельзя.

204. Пусть есть n людей и n шляпы n цветов, все видят цвета всех, остальных, кроме одного исключения: Алисе запрещено смотреть на Боба. Есть ли у такая стратегия, чтобы хотя бы один гарантированно угадал свой цвет?

205. Алисе и Бобу на лбу написали по одному рациональному числу. После этого каждый из них должен написать на бумажке конечный набор рациональных чисел. Каждый видит число другого, но никаких подсказок давать не разрешается. Могут ли они так договориться заранее, чтобы в наборе хотя бы одного из них встретилось его число?

206. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак синего или красного цветов. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из двух цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз).

После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака.

Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?

207. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Мудрецы могут заранее договориться о своих действиях (до того, как им завязали глаза); мудрецам известно, каких 1000 цветов могут быть колпаки.