Серия 19. Камни и хитрые инварианты.

143. В некоторых клетках бесконечной полосы лежат камни (может быть более одного камня в клетке, всего камней конечное число). Разрешается убрать два камня, лежащие в одной клетке, и положить один камень в клетку правее. Докажите, что конечная расстановка камней (то есть расстановка, в которой такую операцию нельзя будет сделать) не зависит от порядка действий и зависит только от первоначальной расстановки.

144. То же самое, но действие такое: убирается по камню с клеток i и $i+1$ и кладётся камень в клетку $i+2$. Докажите, что все конечные расстановки, в которых в каждой клетке не более одного камня, получаемые из заданной начальной, одинаковые.

145. На бесконечной клетчатой плоскости квадрат $n \times n$ заполнен фишками. Разрешается делать ходы следующего типа: если подряд расположены клетки A, B и C, клетка A пустая, а в клетках B и C есть фишки, то клетки B и C освобождаются, а в клетку A ставится фишка. (То есть фишка C перепрыгивает фишку B, съедает её и встаёт на свободное место).

Докажите, что для достаточно больших n верно следующее утверждение: если сделано менее $0,49n^2$ ходов, то можно сделать ещё один.

146. Четверть плоскости с положительными координатами разбили на клетки 1×1. В некоторых клетках получившейся доски лежат фишки. Разрешается убрать фишку с клетки, имеющей координаты (i, j) и поставить по фишке в клетки $(i+1, j)$ и $(i, j+1)$, при этом запрещается ставить более одной фишки в клетку. Изначально в трёх левых нижних клетках, образующих уголок, стоит по фишке. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы они стали пустыми.

147. То же самое, но изначально стоит одна фишка в левой нижней клетке. Доказать, что нельзя добиться того, чтобы шесть клеток с минимальной суммой координат (уголок слева снизу) оказались без фишек.

148. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:
1. Снять по одному камню с клеток $n-1$ и n и положить один камень в клетку $n+1$;
2. Снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n+1$, $n-2$.

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

149. В некоторых клетках бесконечной в обе стороны полосы лежат камни (всего конечное число). Разрешается взять два камня, лежащие в соседних клетках, и сдвинуть один из них вправо на одну, а другой – влево на одну так, чтобы расстояние между ними увеличилось. Докажите, что нельзя делать такие ходы бесконечно долго.