Двойные отношения

Определение. Двойным отношением четвёрки точек $(ABCD)$ называют число $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} : \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}$.

Определение. Двойным отношением четвёрки прямых (PA, PB, PC, PD), проходящих через одну точку, называют число $\frac{\sin\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC})}{\sin\angle(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD})} : \frac{\sin\angle(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})}{\sin\angle(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PD})}$.

Определение. Четвёрка точек, для которой $(ABCD) = -1$, называется гармонической.

Определение. Двойным отношением четвёрки точек $(ABCD)$, лежащих на одной окружности, называется двойное отношение (PA, PB, PC, PD) для любой точки P на этой же окружности. (Проверьте корректность определения!)

Предложение. Для любых четырёх точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, и точки P вне неё верно равенство $(ABCD) = (PA, PB, PC, PD)$.

Следствие. Двойное отношение точек сохраняется при проецировании с a) прямой на прямую b) прямой на окружность из точки окружности c) окружности на прямую из точки окружности d) окружности на окружность из точки пересечения.

267. a) Чевианы AA_1, BB_1 и CR треугольника ABC пересекаются в точке P. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке T. Докажите, что $(ABRT) = (ABTR) = (BATR) = (BART) = -1$. b) Положим, что M — середина AB, а R — бесконечно удалённая точка. Докажите, что $(ABMR) = -1$.(Нужные определения дайте сами.) c) P и Q — основания внешней и внутренней биссектрис угла C треугольника ABC. Докажите, что $(ABPQ) = -1$. d) Точки P и Q инверсны относительно окружности ω. Прямая PQ пересекает ω в точках A и B. Докажите, что $(ABPQ) = -1$.

268. Обозначим через P основание внутренней биссектрисы угла C треугольника ABC, а через Q — внешней. Пусть M — середина СB, а прямые PM и AC пересекаются в точке R. Докажите, что $RQ = RC$.

269. Пусть H_B — основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B; L_B — основание соответствующей биссектрисы; K_B — точка касания вписанной окружности со стороной AC; T_B — точка касания вневписанной окружности со стороной AC. Точки H_A, L_A, K_A, T_A определяются аналогично. Докажите, что

a) $(H_B, L_B, K_B, T_B) = -1$;

b) $(C, H_B, T_B, K_B) = (C, H_A, T_A, K_A)$;

c) прямые $H_AH_B, L_AL_B, K_AK_B, T_AT_B$ конкурентны.

270. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R, а продолжения боковых сторон в точках P и Q. Пусть T — основание перпендикуляра, опущенного из R на PQ. Докажите, что $\angle ATR = \angle CTR$.

271. Построение одной линеечкой. a) Постройте четвёртую гармоническую точку к трём данным и четвёртую гармоническую прямую к трём данным. b) Даны две параллельных прямых. Поделите данный отрезок на одной из них пополам. c) В условиях предыдущего пункта удвойте отрезок на одной из них.

272. Даны параллелограмм, прямая и точка. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

273. a) **Теорема о бабочке.** Хорды AB и CD окружности ω проходят через середину M хорды XY той же окружности. Отрезки AC и BD пересекают XY в точках P и Q. Докажите, что $MP = MQ$. Докажите при помощи двойных отношений

b) **Теорема о двойной бабочке.** Хорды AB и CD окружности ω проходят соответственно через точки X' и Y', лежащие на хорде XY, такие что $XX' = YY'$. Отрезки AC и BD пересекают XY в точках P и Q. Докажите, что $XP = YQ$.

274. На окружности ω взяты точки A, B, C и D в указанном порядке. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD, а ω_1 и ω_2 — окружности, описанные около треугольников AOB и COD соответственно. Прямая l проходит через точку O пересекает окружность ω в точках M и N, окружность ω_1 — в точке P и окружность ω_2 — в точке Q. Докажите, что $PM = NQ$.