Проективная геометрия

258. Пусть O — точка пересечения диагоналеий четырёхугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения продолжений сторон AB и CD, BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L, а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N. Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF.

259. Дан выпуклыий четырёхугольник $ABCD$. Пусть E, F — точки пересечения продолжений противоположных сторон AB и CD, AD и BC соответственно, M — произвольная точка внутри четырёхугольника. Пусть S — точка пересечения прямых AD и EM, P — точка пересечения прямых AB и FM. Докажите, что прямые BS, PD и MC пересекаются в одной точке.

Теорема 1. Для любых двух четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ существует единственное проективное преобразование, переводящее A в A_1, B в B_1, C в C_1 и D в D_1.

260. На прямой a лежат точки A_1, A_2, A_3, а на прямой b — точки B_1, B_2, B_3. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в точке C_3, прямые A_2B_3 и A_3B_2 пересекаются в точке C_1, прямые A_3B_1 и B_1A_3 пересекаются в точке C_2. Докажите, что точки C_1, C_2 и C_3 лежат на одной прямой. *(теорема Паппа)*

261. Даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке C_3, прямые B_1C_1 и B_2C_2 — в точке A_3, прямые C_1A_1 и C_2A_2 — в точке B_3. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки A_3, B_3 и C_3 лежат на одной прямой. *(теорема Дезарга)*

262. Даны перспективные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Оказалось, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $B_2C_2A_2$ тоже перспективны. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $C_2A_2B_2$ тоже перспективны.

263. a) Даны точки A и B на прямой ℓ. Можно ли одной линейкой построить середину отрезка между A и B? b) Даны точки A и B на прямой ℓ и прямая, параллельная ℓ. Можно ли одной линейкой построить середину отрезка между A и B?

264. Две прямые пересекаются в луже. Также дана точка вне лужи. Постройте одной линейкой прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых и данную точку.

265. Две точки расположены так, что к ним нельзя приложить линейку из-за лужи. Также дана прямая, не пересекающая лужу. Постройте одной линейкой точку пересечения прямой через две данные точки и данной прямой.

266. Дан пятиугольник. Его диагонали также образуют пятиугольник. Докажите, что два полученных пятиугольника проективно эквивалентны.

Теорема 1. Для любых двух четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ существует единственное проективное преобразование, переводящее A в A_1, B в B_1, C в C_1 и D в D_1.

267. На прямой a лежат точки A_1, A_2, A_3, а на прямой b — точки B_1, B_2, B_3. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в точке C_3, прямые A_2B_3 и A_3B_2 пересекаются в точке C_1, прямые A_3B_1 и B_1A_3 пересекаются в точке C_2. Докажите, что точки C_1, C_2 и C_3 лежат на одной прямой. *(теорема Паппа)*

268. Даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке C_3, прямые B_1C_1 и B_2C_2 — в точке A_3, прямые C_1A_1 и C_2A_2 — в точке B_3. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки A_3, B_3 и C_3 лежат на одной прямой. *(теорема Дезарга)*

269. Даны перспективные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Оказалось, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $B_2C_2A_2$ тоже перспективны. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $C_2A_2B_2$ тоже перспективны.

270. a) Даны точки A и B на прямой ℓ. Можно ли одной линейкой построить середину отрезка между A и B? b) Даны точки A и B на прямой ℓ и прямая, параллельная ℓ. Можно ли одной линейкой построить середину отрезка между A и B?

271. Две прямые пересекаются в луже. Также дана точка вне лужи. Постройте одной линейкой прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых и данную точку.

272. Две точки расположены так, что к ним нельзя приложить линейку из-за лужи. Также дана прямая, не пересекающая лужу. Постройте одной линейкой точку пересечения прямой через две данные точки и данной прямой.

273. Дан пятиугольник. Его диагонали также образуют пятиугольник. Докажите, что два полученных пятиугольника проективно эквивалентны.