

Комбигеом

1. На плоскости дано 300 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует 100 попарно не пересекающихся треугольников с вершинами в этих точках.
2. Шарообразная планета окружена 25 точечными астероидами. Доказать, что в любой момент на поверхности планеты найдется точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 11 астероидов.
3. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.
4. Несколько точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Доказать, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.
5. На прямоугольном листе бумаги отмечены **(а)** несколько точек на одной прямой; **(б)** три точки. Разрешается сложить лист бумаги несколько раз по прямой так, чтобы отмеченные точки не попали на линии сгиба, и затем один раз шилом проколоть сложенный лист насквозь. Докажите, что это можно сделать так, чтобы дырки оказались в точности в отмеченных точках и лишних дырок не получилось.
6. Найдите все конечные множества точек на плоскости, обладающие тем свойством, что никакие три точки множества не лежат на одной прямой и вместе с каждыми тремя точками данного множества точка пересечения высот треугольника, образованного этими точками, также принадлежит данному множеству.
7. На плоскости даны n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколькими различными способами это множество точек можно разбить на два непустых подмножества так, чтобы выпуклые оболочки этих подмножеств не пересекались?
8. Имеется набор векторов v_1, \dots, v_n на плоскости такой, что $v_1 + \dots + v_n = 0$. Докажите, что найдется выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_n$ такой, что $\overline{A_i A_{i+1}} = v_i$.