

Конструктивы

1. На столе лежат 100 одинаковых с виду монет, из которых 85 фальшивых и 15 настоящих. В вашем распоряжении есть чудо-тестер, в который можно положить две монеты и получить один из трех результатов — «обе монеты настоящие», «обе монеты фальшивые» и «монеты разные». Как за 64 таких теста найти все фальшивые монеты?
2. В однокруговом турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Спартак одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?
3. Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a , b , c и d , для которых числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ являются полными квадратами.
4. 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным — другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого — 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?
5. Можно ли вписать правильный октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба? (У правильного октаэдра 6 вершин, из каждой выходит 4 ребра, все его грани — правильные треугольники.)
6. Существует ли выпуклое тело, отличное от шара, такое что его ортогональные проекции на три перпендикулярные плоскости являются окружностями?
7. Существует ли многочлен степени 2013 такой, что его значения в точках $1, 2, \dots, 2014$ — это различные степени двойки?