Предрегиональный разнобой по геометрии

1. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая l_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая l_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые l_1 и l_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных l_1 и l_2.

2. Из вершины B остроугольного треугольника ABC проведены перпендикуляры к сторонам AB и BC до пересечения с прямой AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и PBQ касаются.

3. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.

4. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины противоположных сторон, делит диагонали в одинаковом отношении.

5. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность S_2 в точке M, луч O_2A пересекает окружность S_1 в точке N, а прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F. Докажите, что $AE = AF$.

6. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Докажите, что $IO = IH$, где I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр.

7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что

$$\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ .$$