Графы. Кто ищет — тот всегда найдёт!

1. Куб $n \times n \times n$ разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$. Какое минимальное количество граней 1×1 необходимо в нем убрать, чтобы из любой его части можно было пробраться наружу?

2. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

3. На плоскости нарисовано n кругов, причем любые два круга не пересекаются, но могут касаться. Каково максимальное количество точек касания?

4. Из клетчатой доски, раскрашенной шахматным образом, вырезана связная (по сторонам клеток) фигура, содержащая n черных клеток.

(a) Сколько максимум у нее может быть белых клеток?

(b) У фигуры ровно $3n$ белых клеток. Докажите, что ее можно разрезать на четырехклеточные буквы «Т».

5. N^3 единичных кубиков просверлены по диагонали и плотно нанизаны на нить, после чего нить связана в кольцо (т. е. вершина первого кубика соединена с вершиной последнего). При каких N из получившегося «ожерелья» можно сложить куб с ребром N?

6. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

7. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось четное количество фишек.