Стереометрия

1. Основания трех высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан противоположных граней. Докажите, что все ребра пирамиды равны.

2. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объемов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объемов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

3. Назовем прямую, проходящую через середины скрещивающихся ребер тетраэдра, *хорошей* средней линией тетраэдра, если она образует равные углы с четырьмя прямыми, содержащими остальные ребра тетраэдра. Докажите, что тетраэдр правильный, если хотя бы две его средние линии хорошие.

4. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины ребер SA, SB, SC и SD пирамиды $SABCD$. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

5. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — соответственно середины ребер SA, SB, SC, SD четырехугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырехугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

6. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две непараллельные треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырехугольники ABB_1A_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1. Докажите, что плоскость, проведенная через точки пересечения диагоналей четырехугольных граней, содержит прямую пересечения плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$.

7. Пусть $ABCD$ — тетраэдр, ω — сфера, касающаяся всех его ребер. Две точки касания сферы ω с ребрами тетраэдра $ABCD$ соединим отрезком тогда и только тогда, когда они лежат на одной грани тетраэдра. Докажите, что сумма всех таких отрезков меньше, чем $3(AI + BI + CI + DI)$, где I — центр сферы ω.