

Разнойбой

1. На столе лежат картинками вниз 8 игральных карт. Вы можете указать на любую группу карт (в частности, на одну карту, или, например, на все 8) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Можно ли при помощи 5 вопросов узнать число бубновых карт, лежащих на столе?
2. Ожерелье состоит из 100 синих и некоторого количества красных бусин, нанизанных на нить в форме окружности. Известно, что на любом отрезке ожерелья, содержащем 8 бусин, есть не менее 5 красных. Какое наименьшее количество красных бусин может быть в ожерелье?
3. $P(x)$ — квадратный трехчлен. Какое наибольшее количество членов, равных сумме двух предыдущих членов, может быть в последовательности

$$P(1), P(2), P(3), \dots ?$$

4. В клетках таблицы 10×10 написаны целые числа. Разрешается выбрать любую клетку и вычесть из стоящего в ней числа количество соседних по стороне клеток, а к числам, стоящим в соседних клетках, прибавить по 1. Всегда ли из таблицы, сумма чисел в которой равна 0, такими операциями можно получить таблицу, целиком заполненную нулями?
5. На высотах треугольника ABC отложили отрезки AA_1, BB_1, CC_1 , равные диаметру вписанной окружности (высота — это отрезок). Эта окружность касается сторон BC, AC, AB в точках A', B', C' . Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в одной точке.
6. Дано натуральное число n . Рассмотрим все наборы целых неотрицательных чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n \text{ такие, что } x_1 + x_2 + \dots + x_n = n - 1.$$

Найдите наибольший общий делитель всех произведений вида

$$C_n^{x_1} \cdot C_n^{x_2} \cdot \dots \cdot C_n^{x_n}.$$