

Неравенства

1. Про неотрицательные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ с суммой 2015 известно, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2015}$. Найдите наименьшее значение величины $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2015}$.
2. Докажите, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше, чем среднее арифметическое их среднего геометрического и среднего квадратического.
3. a, b, c — стороны треугольника с периметром 1. Докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} \geq 12.$$

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a + b + c + abc = 4$. Докажите неравенство

$$\left(1 + \frac{a}{b} + ca\right)\left(1 + \frac{b}{c} + ab\right)\left(1 + \frac{c}{a} + bc\right) \geq 27.$$

5. Даны натуральные числа m и n . Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geq 1.$$

6. Сумма квадратов неотрицательных чисел a, b, c равна 48. Докажите неравенство

$$a^2\sqrt{2b^3+16} + b^2\sqrt{2c^3+16} + c^2\sqrt{2a^3+16} \leq 576.$$

7. Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, \dots, x_n равна 2. При $n \geq 4$ докажьте неравенство

$$\frac{x_1}{1+x_2^2} + \frac{x_2}{1+x_3^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2} \geq \frac{3}{2}.$$