

Геометрический разнбой

1. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается его сторон BC , AC и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что H лежит на биссектрисе угла CAB .
2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1 . На стороне AB выбрана точка K так, чтобы $BK = BA_1$. Биссектриса угла C пересекает A_1K в точке P . Докажите, что $PA = PA_1$.
3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Касательная к ω_1 в точке B пересекает второй раз ω_2 в точке P . Касательная к ω_2 в точке B пересекает второй раз ω_1 в точке Q . Прямая QA второй раз пересекает ω_2 в точке R . Докажите, что $BR = BP$.
4. Пусть A , B и C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B . Из точки P , лежащей на прямой b , опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $AC \perp A_1C_1$.
5. На сторонах треугольника ABC во внешнюю границу, как на основаниях, построены равнобедренные треугольники BCE , CAF и ABD . Докажите, что прямые, проходящие через точки A , B и C перпендикулярно EF , FD и DE соответственно, пересекаются в одной точке.
6. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точка M — это середина стороны AD , $\angle BMC = 90^\circ$, $\angle BAD = \angle BCM$. Докажите, что тогда прямые AB и CD пересекаются под прямым углом.
7. На плоскости отмечены два отрезка. Найдите ГМТ точек плоскости, из которых эти отрезки видны под равными углами.