НОДы и НОКи

1. Для натуральных a и b выполнено $\text{НОД}(a,b)+\text{НОК}(a,b)=a+b$. Докажите, что из этих двух чисел одно делится на другое.

2. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите, что $a > pq/\big(2(p+q)\big)$.

3. Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\text{НОК}(a,b)-\text{НОД}(a,b)=\frac{ab}{5}\,.$$

4. Натуральные числа a и b таковы, что $a\cdot\text{НОД}(a,b)+b\cdot\text{НОК}(a,b)<2{,}5ab$. Докажите, что a делится на b.

5. Даны натуральные числа a и b такие, что $(a+1)/b+(b+1)/a$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит числа $\sqrt{a+b}$.

6. a и b — различные натуральные числа такие, что, $ab(a+b)$ делится на a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$.

7. Докажите, что если $\text{НОК}(a,a+5)=\text{НОК}(b,b+5)$, то $a=b$.

8. Могут ли $\text{НОК}(a,b)$ и $\text{НОК}(a+c,b+c)$ быть равны?

9. Пусть m и n взаимно просты. Выразите $\text{НОД}(5^n+7^n,5^m+7^m)$ через m и n.

10. Для любых натуральных чисел m и n ($n>m$) докажите неравенство

$$\text{НОК}(m,n)+\text{НОК}(m+1,n+1)>2mn/\sqrt{n-m}\,.$$