

Полуинвариант

1. Таблица 15×15 заполнена плюсами и минусами. Разрешается выбрать любую строку или любой столбец и поменять все стоящие там знаки на противоположные. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце плюсов было больше, чем минусов.
2. На плоскости дано $2N$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, N из них окрашены в красный цвет, остальные в синий. Докажите, что эти точки можно соединить N непересекающимися отрезками, каждый из которых будет соединять красную точку с синей.
3. По окружности расставлены n чисел. Если подряд стоят числа a , b , c и d и при этом $(a - d)(b - c) > 0$, то числа b и c разрешается поменять местами. Докажите, что через несколько шагов нам не удастся произвести ни одной такой перестановки.
4. На окружности сидят 12 кузнечиков в различных точках. Эти точки делят окружность на 12 дуг. Отметим 12 середин этих дуг. По сигналу кузнечики одновременно прыгают, каждый — в ближайшую по часовой стрелке отмеченную точку. Снова образуются 12 дуг, прыжки в середины дуг повторяются и т. д. Может ли хотя бы один кузнечик вернуться в свою исходную точку после того, как им сделано
(a) 12 прыжков? **(b)** 13 прыжков?
5. Шахматная доска разбита на доминошки. К правой верхней клетке добавлена одна клетка справа (первая строка состоит из 9 клеток, остальные — из 8). Разрешается вынимать любую доминошку и класть ее на две пустые соседние клетки. Докажите, что все доминошки можно расположить горизонтально.