Корней много не бывает!

1. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трехчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трехчлена.

2. Опишите многочлены $f(x)$ степени не выше 3, которые удовлетворяют условиям: $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 3$.

3. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

4. Про многочлен $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_0$ известно, что

$$f(1) = f(-1)\,, \quad \ldots\,, \quad f(5) = f(-5)\,.$$

Докажите, что $f(x) = f(-x)$ для любого действительного x.

5. Многочлен $p(x, y)$ равен нулю во всех целых точках. Докажите, что он равен нулю.

6. Докажите, что не существует никакой (даже разрывной) функции $y = f(x)$, что $f(f(x)) = x^2 - 1996$ при всех x.

7. Даны два различных приведённых кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ и $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.