

Разнойой

1. Докажите, что доску 12×12 можно разрезать на прямоугольники 1×2 более, чем 10^{14} способами.
2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AC + BD = 20$, $AB + CD = 12$. Какое наибольшее значение может принимать площадь четырехугольника $ABCD$?
3. Дано натуральное число n и набор различных натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} , каждое из которых не превосходит n^2 . Докажите, что в множестве попарных разностей этого набора какое-то ненулевое число встретится не менее трех раз.
4. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots , что для любого натурального n выполнено соотношение $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}$?
5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) провели такую чевиану AH , что радиус вписанной в треугольник ABH окружности равен радиусу невписанной в треугольник ACH окружности, касающейся отрезка CH . Докажите, эти радиусы равны четверти длины высоты треугольника ABC , опущенной на боковую сторону.
6. Найдите максимальное количество ребер в графе на $n \geq 6$ вершинах, где любые два цикла имеют общую вершину.