

Графы. Добавка про деревья

1. Доказать, что в дереве пересечение поддеревьев является поддеревом.
2. Докажите, что вершины любого дерева можно покрасить в два цвета таким образом, чтобы смежные вершины имели разные цвета.
3. Есть n коробок, к каждой лежит по одному утюгу, все утюги — разные. У вас есть кнопки, на которых написано «поменять местами содержимое i -ой и j -ой коробки».
(а) Докажите, что можно выбрать такие $(n - 1)$ кнопок, чтобы используя только их можно было бы реализовать любую перестановку утюгов;
(б) Докажите, что меньшим числом кнопок обойтись нельзя.
4. В группе людей каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.
5. В связном графе есть остовное дерево с m висячими вершинами и с n висячими вершинами. Докажите, что для любого k такого, что $m < k < n$, в этом графе найдется остовное дерево с k висячими вершинами.