

Движения плоскости

1. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2 . Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2 . Эти отрезки пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2 . Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.
2. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE (точка C лежит на отрезке AE). Точки M и P — середины отрезков AD и BE . Докажите, что треугольник CPM — равносторонний.
3. **Лемма Архимеда.** Пусть A и B — фиксированные точки окружности S . Выберем одну из дуг окружности S с концами A и B и рассмотрим произвольную окружность, касающуюся отрезка AB и выбранной дуги. Обозначим точки касания через P и Q соответственно. Докажите, что все прямые PQ пересекаются в одной точке.
4. **Точка Торричелли.** Пусть T — такая точка плоскости, что сумма расстояний от нее до вершин данного остроугольного треугольника минимальна. Докажите, что все стороны треугольника видны из нее под углом 120° .
5. Окружность пересекает стороны AC , BC и AB положительно ориентированного треугольника ABC в точках B_2 и B_1 , A_2 и A_1 , C_1 и C_2 (в порядке обхода по часовой стрелке). Оказалось, что перпендикуляры к сторонам AC , BC и AB , восстановленные в точках B_2 , A_1 и C_1 соответственно, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к тем же сторонам, восстановленные в точках B_1 , A_2 и C_2 , также пересекаются в одной точке.
6. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит
(а) 0,34; (б) 0,287.