Графы. Связность

1. В графе на n вершинах степень каждой не меньше $n/2$. Докажите, что этот граф связен.

2. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека все еще не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

3. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более:
(a) 198 перелетов; **(b)** 196 перелетов.

4. В связном графе на 100 вершинах 199 ребер. Докажите, что можно удалить все ребра некоторого цикла так, чтобы граф остался связен.

5. В стране n городов, некоторые пары из которых соединены непересекающимися дорогами. Известно, что из любого города можно добраться по дорогам до любого другого, причем единственным способом (если не проезжать по одной дороге более одного раза). Докажите, что министр может объявить не более, чем $n/51$ городов закрытыми (и запретить въезд в них и выезд из них) так, чтобы после этого для любой пары городов X, Y выполнялось одно из двух условий: либо из X нельзя добраться до Y, либо из X можно добраться до Y, проехав не более, чем по 49 дорогам.

6. Известно, что в графе G из вершины u в вершину v можно добраться при удалении любой другой вершины G. Докажите, что между u и v есть два непересекающихся пути.

7. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p, либо q человек. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну между гостями, если:
(a) p и q взаимно просты;
(b) p и q имеют наибольший общий делитель d?