Многочлены с целыми коэффициентами

1. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

2. **(a)** Докажите, что если многочлен $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами принимает при пяти целых значениях x значение 7, то он не может принимать значение 14 ни при каком целом значении x.
(b) То же самое при четырех значениях.

3. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

4. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + \ldots + P(n)$ делится на k.

5. **(a)** Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.
(b) Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.
(c) Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, для которого множество простых делителей ненулевых значений в целых точках конечно.

6. Дано n чисел, p — их произведение. Разность между p и каждым из этих чисел — нечетное число. Докажите, что все данные n чисел иррациональны.