Гидроксид разнобоя

Упражнения

В треугольнике ABC отмечены центр описанной окружности O и точка пересечения высот *(ортоцентр)* H.

1. **Лемма 1.** Докажите, что $\angle BAO = \angle CAH$.
2. **Лемма 2.** Докажите равенство векторов $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.
   Эквивалентно, $\overline{AH} = \overline{OB} + \overline{OC}$.
3. Восстановите треугольник по данным A, O и H.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Перпендикуляр, опущенный из B на прямую AD, пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E, отличной от B. Докажите, что точки A, E и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой.
5. **(a)** Пусть в треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Пусть B' и C' — образы точек B и C соответственно при некоторой инверсии с центром в A. Докажите, что AO — прямая, содержащая высоту в треугольнике $AB'C'$.
   (b) Пусть в тетраэдре $SABC$ точка O — центр описанной сферы. Пусть A', B' и C' — образы точек A, B и C соответственно при некоторой инверсии с центром в S. Докажите, что SO — прямая, содержащая высоту в тетраэдре $SA'B'C'$.

Задачи

6. **(a)** Прямые a и b пересекаются в точке L. Прямая a пересекает окружность ω в точках A_1 и A_2, а b пересекает ω в точках B_1 и B_2. Пусть R_1 — центр описанной окружности в треугольнике LA_1B_1. Докажите, что LR — высота в треугольнике LA_2B_2.
   (b) В условиях предыдущего пункта пусть O — центр окружности ω. Докажите, что $LR_1 = OR_2$, где R_2 определяется аналогично R_1.
7. Дан остроугольный треугольник ABC, причем $AB > AC$ и $\angle BAC = 60^\circ$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника, а H — ортоцентр. Прямая OH пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Найдите отношение $PO : HQ$.
8. Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC.
9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено $AB = 2CD$. Обозначим прямую, перепендикулярную CD и проходящую через точку C, через l. Окружность с центром D и радиусом DA пересекает l в точках P и Q. Докажите, что AP перпендикулярна BQ.