Индукция

1. Проведем в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

2. В квадрате 1024×1024 вырезали одну клетку. Докажите, что оставшееся можно разрезать на уголки из трех клеток.

3. На какую максимальную степень тройки делится число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц?

4. Петя Торт умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n+1)$, где n — любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы разделить отрезок на любое количество одинаковых частей. Прав ли он?

5. В компании из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $(2k-4)$ разговора все они могут узнать все новости.

6. Даны натуральные числа $x_1, \dots, x_n$. Докажите, что число $(1+x_1^2)\cdot(1+x_2^2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n^2)$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

7. Определим числа K_n: $K_0 = 1$ и $K_{n+1} = 1 + \min(2K_{[n/2]}, 3K_{[n/3]})$. Докажите, что $K_n \geqslant n$.

8. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

9. Доказать, что по окончании волейбольного турнира с участием 2^n команд (в один круг) можно выбрать команды $K_1, K_2, \dots, K_{n+1}$ так, что каждая из команд K_j, $j \leqslant n$, выиграла у всех команд $K_{j+1}, K_{j+2}, \dots, K_n$.

10. В n мензурок налиты n разных жидкостей, кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли за конечное число операций составить равномерные смеси в каждой мензурке, то есть сделать так, чтобы в каждой мензурке было равно $1/n$ от начального количества каждой жидкости, и при этом одна мензурка была бы пустой. (Мензурки одинаковые, но количества жидкостей в них могут быть разными; предполагается, что можно отмерять любой объем жидкости.)

11. Есть четное число комнат, в каждой по три лампочки. Лампочки разбиты на пары (в паре могут быть лампочки из разных комнат). На каждую пару по одному выключателю, он при нажатии меняет состояние обеих лампочек в паре на противоположное. Докажите, что вне зависимости от того, какие лампочки горели в начале, можно сделать так, чтобы в каждой комнате хотя бы одна лампочка горела и хотя бы одна не горела.