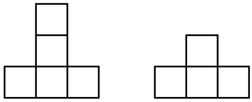
Конструктивы

1. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображенные слева, а можно — на пять фигурок, изображенных справа. (Фигурки можно поворачивать.)



2. На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатили по доске, перекатывая через ребра, так, что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?

3. На плоскости нарисован черный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Можно ли расположить их на плоскости так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного квадрата?

4. Существуют ли натуральные числа m и n, для которых верно равенство: $(-2a^nb^n)^m + (3a^mb^m)^n = a^6b^6$?

5. Треугольник разбили на пять треугольников, ему подобных. Верно ли, что исходный треугольник – прямоугольный?

6. Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

7. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?

8. **(a)** В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

(b) Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдется набор квадратов суммарной площади больше N?