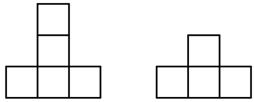
Конструктивы

1. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображенные слева, а можно — на пять фигурок, изображенных справа. (Фигурки можно поворачивать.)



2. На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатили по доске, перекатывая через ребра, так, что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?

3. На плоскости нарисован черный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Можно ли расположить их на плоскости так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного квадрата?

4. Существуют ли натуральные числа m и n, для которых верно равенство: $(-2a^nb^n)^m + (3a^mb^m)^n = a^6b^6$?

5. Треугольник разбили на пять треугольников, ему подобных. Верно ли, что исходный треугольник – прямоугольный?

6. Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

7. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?

8. **(a)** В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

(b) Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдется набор квадратов суммарной площади больше N?

source:approaching/combinatorics-constructive.tex

Принцип крайнего

1.° *Максимум или минимум.* На листке написаны несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число, которое на каждое из них делится. Докажите, что на листке найдется число, которое делится на все числа.

2.° *Первое или последнее.* Петя разложил 10 фруктов на две чаши весов. Далее он 7 раз сделал такую операцию: поменял два фрукта с правой чаши с одним фруктом с левой. Могли ли весы быть в равновесии вначале и после каждой операции?

3.° *Общий делитель.* Пусть $x^3 + x = 5$. Докажите, что x — иррационально.

4. В порядке возрастания длин лежат несколько палочек. Можно взять любые три и проверить, складывается ли из них треугольник. За какое наименьшее число проверок можно доказать или опровергнуть утверждение о том, что из любой тройки палочек складывается треугольник?

5. Глеб, Илья и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Глеба. Он делит их поровну между Ильей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток съедает. Вначале было больше 100 орехов. Докажите, что хотя бы один орех *не* будет съеден.

6. Пусть $2^x = 10$. Докажите, что x — иррационально.

7. На доске выписано 100 целых чисел. Известно, что для любых пяти из этих чисел найдутся такие шесть из этих чисел, что равны средние арифметические этой пятерки и этой шестерки. Докажите, что все числа равны.

8. За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтобы все 100 читателей его услышали.

9. На каждой клетке шахматной доски вначале стоит по ладье. Каждым ходом можно снять с доски ладью, которая бьет нечетное число ладей. Какое наибольшее число ладей можно снять? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей).

source:approaching/combinatorics-extreme-principle.tex

Геометрия

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известны углы: $\angle BCA = 40^\circ$, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle BDA = 20^\circ$, $\angle BDC = 25^\circ$. Найдите угол между диагоналями данного четырехугольника.

2. P — точка пересечения касательных в точках A и B к окружности ω с центром O. Через произвольную точку M на отрезке AB провели прямую, перпендикулярную OM. Эта прямая пересекла прямые PA и PB в точках C и D. Докажите, что M — середина отрезка CD.

3. Даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, которые пересекают обе данные, красят в красный цвет. Найдите все точки пространства, которые останутся неокрашенными.

4. Существует ли выпуклая фигура, которой нельзя накрыть полукруг радиуса 1, но двумя копиями которой можно накрыть круг того же радиуса?

5. В треугольнике ABC точки A_1 и B_1 — середины высот, опущенных из вершин A и B, M и S — середина AB и основание высоты из вершины C соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, M, S лежат на одной окружности.

source:approaching/geometry-mixture-1.tex

Индукция

1. Проведем в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

2. В квадрате 1024×1024 вырезали одну клетку. Докажите, что оставшееся можно разрезать на уголки из трех клеток.

3. На какую максимальную степень тройки делится число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц?

4. Петя Торт умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n+1)$, где n — любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы разделить отрезок на любое количество одинаковых частей. Прав ли он?

5. В компании из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $(2k-4)$ разговора все они могут узнать все новости.

6. Даны натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что число $(1+x_1^2) \cdot (1+x_2^2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n^2)$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

7. Определим числа K_n: $K_0 = 1$ и $K_{n+1} = 1 + \min(2K_{[n/2]}, 3K_{[n/3]})$. Докажите, что $K_n \geqslant n$.

8. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

9. Доказать, что по окончании волейбольного турнира с участием 2^n команд (в один круг) можно выбрать команды $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}$ так, что каждая из команд K_j, $j \leqslant n$, выиграла у всех команд $K_{j+1}, K_{j+2}, \ldots, K_n$.

10. В n мензурок налиты n разных жидкостей, кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли за конечное число операций составить равномерные смеси в каждой мензурке, то есть сделать так, чтобы в каждой мензурке было равно $1/n$ от начального количества каждой жидкости, и при этом одна мензурка была бы пустой. (Мензурки одинаковые, но количества жидкостей в них могут быть разными; предполагается, что можно отмерять любой объем жидкости.)

11. Есть четное число комнат, в каждой по три лампочки. Лампочки разбиты на пары (в паре могут быть лампочки из разных комнат). На каждую пару по одному выключателю, он при нажатии меняет состояние обеих лампочек в паре на противоположное. Докажите, что вне зависимости от того, какие лампочки горели в начале, можно сделать так, чтобы в каждой комнате хотя бы одна лампочка горела и хотя бы одна не горела.

Ищем окружности

1. AH — высота остроугольного треугольника ABC, K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC. Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.

2. На плоскости даны прямая ℓ две точки A и B по одну сторону от прямой. На прямой ℓ выбрана точка M, сумма расстояний от которой до A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния до точек A и B равны: $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

3. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD — точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

4. **(a)** Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны, лежит на описанной окружности треугольника ABC.
   (b) Докажите, что A, C, H и проекция H на медиану треугольника, выходящую из вершины B, лежат на одной окружности.

5. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла B.

6. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM, а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM. Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

source:approaching/geometry-concyclic-points.tex

Классические теоремы теории чисел

Малая теорема Ферма. Если p — простое число, а a не делится на p, то $(a^{p-1} - 1)$ делится на p.

Альтернативная формулировка. Если p — простое число, то $(a^p - a)$ делится на p.

1. **(a)** Вспомните, что $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$.
(b) Осознайте, что C_p^l делится на p, если p — простое число, а $0 < l < p$.
(c) Докажите, что $\left((a+1)^p - a^p - 1\right)$ делится на p и выведите отсюда доказательство малой теоремы Ферма по индукции.

2. **(a)** Пусть a не делится на p. Докажите, что среди чисел

$$1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$$

все ненулевые остатки при делении на p содержатся по одному разу.
(b) Из того, что произведение остатков в одинаковых наборах дают одинаковые остатки, выведите малую теорему Ферма.

3. **(a)** Отметим на бумаге произвольным образом $(p-1)$ точку. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на p. Проведем из остатка k стрелочку в остаток ka.
(b) Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в кажду точку входит одна стрелочка.
(c)

Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты.
(d)

Докажите, что у всех циклических маршртутов одна и та же длина и она делит $(p-1)$.
(e) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

Пусть n — натуральное число. Обозначим $\varphi(n)$ количество чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*.

Теорема Эйлера. Пусть n — натуральное число, a — взаимно простое с n. Тогда $(a^{\varphi(n)} - 1)$ делится на n.

4. Найдите $\varphi(p)$, где p простое, $\varphi(100)$, $\varphi(2^l)$, $\varphi(p^k)$.

5. **(a)** Докажите, что если умножить все взаимно простые с n остатки на a (которое с n тоже взаимно просто), то получатся все взаимно простые с n остатки по одному разу.
(b) Проведите рассуждения, аналогичные второму доказательству малой теоремы Ферма и докажите теорему Эйлера.

6. Докажите, что $(n^{561} - n)$ делится на 561.

7. **(a)** Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 6800 для любого натурального n.
(b) Можно ли вместо 6800 доказать для какого-то большего числа?

8. Докажите, что $2^{3^k}+1$ делится на 3^{k+1}.

9. **(a)** Пусть p и q — два различных простых числа. Докажите, что $\varphi(pq) = (p-1)\cdot(q-1)$.

(b) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

(c) Пусть $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ (предполагаем, что все p_i различны). Чему равно $\varphi(n)/n$?

source:approaching/algebra-number-theory-euler-theorem-1.tex

Оценка + пример

1. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее значение наибольшего из этих чисел.

2. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на шахматной доске, чтобы
(1) среди отмеченных клеток не было соседних (имеющих общую сторону или общую вершину),
(2) добавление к этим клеткам любой одной клетки нарушало пункт (1)?

3. Какое наибольшее число белых и черных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем черных?

4. Город имеет форму квадрата 5×5; по границам между клеточками проходят улицы. Какую наименьшую длину может иметь маршрут, если нужно пройти по каждой улице этого города и вернуться в прежнее место? (По каждой улице можно проходить любое число раз.)

5. Петя красит клетки таблицы $n \times n$ по следующему правилу: если какая-то незакрашенная клетка граничит по стороне с двумя закрашенными, то ее можно закрасить. Какое наименьшее число клеток могло быть закрашено изначально, если известно, что Петя смог закрасить все келтки?

6. Петя красит клетки таблицы $n \times m$ по следующему правилу: если в каком-либо квадрате 2×2 уже закрашены три клетки, то он может закрасить четвертую. Какое наименьшее число клеток могло быть закрашено изначально, если известно, что Петя смог закрасить все келтки?

7. На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

source:approaching/combinatorics-two-sided-estimate-1.tex

Оценка + пример. Добавка

1. Число называется *несложным,* если оно является произведением ровно двух простых (быть может, равных). Какое наибольшее количество несложных чисел может идти подряд?

2. Какое максимальное число королей, не бьющих друг друга, можно расставить на шахматной доске 8×8?

3. У Чебурашки есть набор из 36 камней массами 1 г, 2 г, … , 36 г, а у Шапокляк есть суперклей, одной каплей которого можно склеить два камня в один (соответственно, можно склеить 3 камня двумя каплями и так далее). Шапокляк хочет склеить камни так, чтобы Чебурашка не смог из получившегося набора выбрать один или несколько камней общей массой 37 г. Какого наименьшего количества капель клея ей хватит, чтобы осуществить задуманное?

4. В Черноморске живет n жителей. Все они образовали партию. Затем эта партия разделилась на две непересекающиеся фракции, каждая из которых объявила себя партией. Каждый последующий день каждая из образовавшихся в предыдущий день партий делилась на две фракции, а каждая фракция, в которой больше одного человека, тут же объявляла себя партией. Иные партии не образовывались. Когда процесс закончился, каждый житель заплатил членский взнос в 1 рубль каждой партии, в которой состоял. Найдите максимально возможную сумму взносов.

5. Глеб кладет спички в клеточки таблицы 5×5. Каждая спичка должна лежать полностью внутри одной из клеточек. Длина каждой спички равна длине диагонали клеточки. Спички не могут пересекаться (в том числе соприкасаться концами). Какое наибольшее количество спичек может выложить Глеб?

source:approaching/combinatorics-two-sided-estimate-1-more.tex

Неравенства

Вспомним неравенства о средних.

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}\,.$$

1. *(Упражнение)* Докажите, что для положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac\,.$$

2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{d}}+\sqrt{\frac{c+d}{a}}+\sqrt{\frac{d+a}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}\,.$$

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d, e выполнено неравенство

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a(b+c+d+e)\,.$$

4. Докажите неравенства для положительных значений переменных:

(a) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c} \geqslant \dfrac{9}{2(a+b+c)}$;

(b) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

5. Докажите, что выполнено неравенство:

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a} < 12\,.$$

6. Пусть $a > 0$. Найдите минимальное значение выражения

(a) $a+1/a$; **(b)** a^3+1/a ;

(c) $a^{40}+1/a^{16}+2/a^4+4/a^2+8/a$.

7. Докажите, что для положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$2^{10}(a+b^2+c^4)^7 \geqslant 7^7(abc)^4\,.$$

8. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ac\,.$$

9. Докажите, что для положительных чисел a, b, c таких, что $a+b+c=1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}\,.$$

source:approaching/algebra-inequality-mean.tex

Уравнения в целых числах и сравнения по модулю

1. Докажите, что не имеют решений в целых числах уравнения:
(a) $x^2 + 6y^2 = 3z^2 + 2$; **(b)** $15x^2 - 7y^2 = 9$;
(c) $x^2 + y^2 = 1703$; **(d)** $x^2 - 7y^2 = 5$;

2. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на 7. Докажите, что это выражение делится на 49.

3. Решите в натуральных числах уравнение
(a) $2^n + 7 = k^2$; **(b)** $x^2 + 2015 = y^2$; **(c)** $3^n - 2^m = 1$.

4. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть полным квадратом.

5. На какое количество нулей может оканчиваться число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

source:approaching/algebra-number-theory-diophantine-equations.tex

Самый главный алгоритм

1. Может ли наибольший общий делитель двух натуральных чисел быть больше их разности?
2. Каков наибольший возможный общий делитель чисел $9m + 7n$ и $3m + 2n$, если числа m и n не имеют общих делителей, кроме единицы?
3. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить угол $19°$ на 19 равных частей?
4. Найдите НОД$(11\ldots1, 11\ldots1)$. Здесь в первом числе 100 единиц, а во втором — 60.
5. Найдите НОД$(x^n - 1, x^m - 1)$.
6. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$. Для каких многочленов $R(x)$ разрешимо следующее уравнение?
$$P(x)U(x) + Q(x)V(x) = R(x)$$
($U(x)$ и $V(x)$ — переменные многочлены.)
7. Найдите наименьшее натуральное число, не представимое в виде
$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d},$$
где a, b, c, d — натуральные числа.
8. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок — треугольник со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

source:approaching/algebra-number-theory-euclid-algorithm.tex

Немного энтомологии

На окружности отмечено n точек. В одной из точек сидит кузнечик. Он умеет прыгать по часовой стрелке на b точек (через $(b-1)$ точек на b-ю).

0. Докажите, что через некоторое количество прыжков кузнечик окажется в точке, в которой уже бывал.

1. Докажите, что первая точка, в которой кузнечик побывает дважды — это начало пути кузнечика.

2. В отмеченных точках растет травка. Сколько травки сможет съесть кузнечик? Каким должно быть число b, чтобы кузнечик съел всю травку на окружности?

Определение. Пусть есть два целых числа a и b и натуральное число n. Числа a и b называются *сравнимыми по модулю* n, если $(a-b)$ делится на n. Пишут

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Если b — число от 0 до $n-1$, то говорят, что *a имеет остаток b по модулю n*.

3. Докажите утверждения: *(пункты сдаются одновременно)*
(a) $a \equiv a \pmod{n}$;
(b) $a \equiv b \pmod{n} \;\Rightarrow\; b \equiv a \pmod{n}$;
(c) $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n} \;\Rightarrow\; a \equiv c \pmod{n}$;
(d) $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n} \;\Rightarrow\; a+c \equiv b+d \pmod{n}$;
(e) $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n} \;\Rightarrow\; ac \equiv bd \pmod{n}$;
(f) В каких случаях $ac \equiv bc \pmod{n} \;\Rightarrow\; a \equiv b \pmod{n}$?

4. Для каких a и b у сравнения $ax \equiv b \pmod{n}$ найдется решение x? Опишите все решения этого сравнения.

5. Найдите остаток от деления 3^{2015} на 14.

6. Докажите, что $1^{101} + 2^{101} + \dots + 2015^{101}$ делится на 1008.

7. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

8. Докажите, что для любого числа d, не делящегося на 2 и на 5, найдется число, в десятичной записи которого содержатся одни единицы, и которое делится на d.

9. **Теорема Вильсона.** Докажите, что для простого p выполнено сравнение $(p-1)! \equiv (-1) \pmod{p}$.

10. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

source:approaching/algebra-number-theory-remainders.tex

Малая теорема Ферма

1. Докажите, что для любого целого числа a число $a^{561} - a$ делится на 561.
2. Известно, что число $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12}$ делится на 13. Докажите, что $abcdef$ делится на 13^6.
3. Докажите, что если $x^2 + 1$ делится на нечетное простое p, то $p = 4k + 1$. При помощи этого докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $p = 4k + 1$.
4. Дано простое p и целое a, не делящееся на p. Пусть k — наименьшее натуральное число такое, что $a^k \equiv 1 \pmod p$. Докажите, что $(p-1)$ делится на k.
5. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ — составное.
6. Пусть для простого числа $p > 2$ и целого a, не делящегося на p, выполнено сравнение $x^2 \equiv a \pmod p$. Докажите, что $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$.
7. Докажите, что если p — простое число, $p \neq 2, 5$, то длина периода разложения $1/p$ в десятичную дробь делит $(p-1)$.
8. Даны натуральные $x, y \in [2; 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ составное.

source:approaching/algebra-number-theory-fermat-theorem.tex

Теорема Эйлера

1. Решите уравнения:
(a) $\varphi(x) = 2$; **(b)** $\varphi(x) = 8$; **(c)** $\varphi(x) = 12$; **(d)** $\varphi(x) = 14$.

2. Решите уравнения:
(a) $\varphi(x) = x/2$; **(b)** $\varphi(x) = x/3$; **(c)** $\varphi(x) = x/4$.

3. Известно, что $(m, n) > 1$. Что больше: $\varphi(m \cdot n)$ или $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$?

4. Докажите *тождество Гаусса:*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n\,.$$

5. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

6. Докажите, что для любого нечетного числа m существует такое натуральное n, что $(2^n - 1) \vdots m$.

7. Найдите все такие целые числа a, для которых число $a^{10} + 1$ делится на 10.

source:approaching/algebra-number-theory-euler-theorem-2.tex

Соответствия

1. На параллельных прямых a и b отмечены точки $A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_k$. Проведены все отрезки A_iB_j. Оказалось, что никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения у отрезков A_iB_j?

2. Номер автобусного билета состоит из 6 цифр. Билет называют счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме трех последних цифр. Докажите,что сумма номеров счастливых билетов делится на 13.

3. Каких автобусных билетов больше: счастливых или тех, чьи номера делятся на 11?

4. На окружности даны 2015 точек, одна из них отмечена. Рассмотрим всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, которые содержат отмеченную точку, или тех, которые ее не содержат?

5. Двое бросают монетку: один бросил ее 10 раз, другой — 11. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

6. Имеется сто палочек длины 1, 2, … , 100. Наудачу выбирается три из них. Что больше — вероятность того, что из них можно составить треугольник или вероятность того, что нельзя?

7. На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

(a) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

(b) Покажите, что n может быть больше 4.

source:approaching/combinatorics-correspondence.tex

Соответствия. Добавка

1. **(a)** Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке из трех полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?
   (b) Какое наименьшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в каждом уголке из трех полей было по крайней мере одно черное поле?

2. Существует ли натуральное число, у которого нечетное количество четных натуральных делителей и четное количество нечетных?

3. У Пети есть 12 одинаковых разноцветных вагончиков (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Петя считает, что различных 12-вагонных поездов он сможет составить больше, чем 11-вагонных. Не ошибается ли Петя? (Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета.)

4. Петя подсчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причем в каждом слове букв T и O поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

source:approaching/combinatorics-correspondence-more.tex

Гидроксид разнобоя

Упражнения

В треугольнике ABC отмечены центр описанной окружности O и точка пересечения высот *(ортоцентр)* H.

1. **Лемма 1.** Докажите, что $\angle BAO = \angle CAH$.
2. **Лемма 2.** Докажите равенство векторов $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.
Эквивалентно, $\overline{AH} = \overline{OB} + \overline{OC}$.
3. Восстановите треугольник по данным A, O и H.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Перпендикуляр, опущенный из B на прямую AD, пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E, отличной от B. Докажите, что точки A, E и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой.
5. **(a)** Пусть в треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Пусть B' и C' — образы точек B и C соответственно при некоторой инверсии с центром в A. Докажите, что AO — прямая, содержащая высоту в треугольнике $AB'C'$.
(b) Пусть в тетраэдре $SABC$ точка O — центр описанной сферы. Пусть A', B' и C' — образы точек A, B и C соответственно при некоторой инверсии с центром в S. Докажите, что SO — прямая, содержащая высоту в тетраэдре $SA'B'C'$.

Задачи

6. **(a)** Прямые a и b пересекаются в точке L. Прямая a пересекает окружность ω в точках A_1 и A_2, а b пересекает ω в точках B_1 и B_2. Пусть R_1 — центр описанной окружности в треугольнике LA_1B_1. Докажите, что LR — высота в треугольнике LA_2B_2.
(b) В условиях предыдущего пункта пусть O — центр окружности ω. Докажите, что $LR_1 = OR_2$, где R_2 определяется аналогично R_1.
7. Дан остроугольный треугольник ABC, причем $AB > AC$ и $\angle BAC = 60°$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника, а H — ортоцентр. Прямая OH пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Найдите отношение $PO : HQ$.
8. Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC.
9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено $AB = 2CD$. Обозначим прямую, перепендикулярную CD и проходящую через точку C, через l. Окружность с центром D и радиусом DA пересекает l в точках P и Q. Докажите, что AP перпендикулярна BQ.

Разнобой по геометрии

1. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B. Из точки P, лежащей на прямой b, опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

2. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

3. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

5. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки E и F (точка E ближе к точке B, чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$.

6. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

source:approaching/geometry-mixture-2.tex

Симметрия и перенос

1. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)

2. В точке A стоит пионер Петя с ведром. В точке B горит костер. Петя хочет добежать до реки, набрать воды, подбежать к костру и затушить его. В какую точку берега ему стоит бежать? (Берег реки — прямая, точки A и B лежат по одну сторону от нее).

3. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M внутри него. Через точки A, B, C и D проведены прямые параллельные MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что полученные прямые пересекаются в одной точке.

4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, докажите что радиусы описанных окружностей треугольников ABC, ABH, BCH, CAH равны.

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

6. Дана окружность с центром в O. Дана прямая l, проходящая через O и точка C на прямой l внутри окружности. Точки A и A_1 взяты на окружности в одной полуплоскости относительно OC так, что AC и A_1C образуют одинаковый угол с прямой l. Отрезок AA_1 продлили до пересечения с прямой l — получили точку B. Докажите, что положение точки B не зависит от положения точки A.

7. Дан равнобедренный треугольник ABC с $\angle C = 120^\circ$. Из вершины C выпущены два луча в сторону AB — угол между лучами 60° —, которые, отразившись от нее в точках M и N, пересекают стороны AC и BC соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что площадь CMN совпадает с суммой площадей AA_1M и BB_1N.

8. Треугольники ABC и AA_1B_1 подобны. Точка A_1 лежит на продолжении BC за точку C. Дано $\angle B = \angle B_1 = 90^\circ$; треугольники не накладываются друг на друга. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AA_1C лежит на прямой A_1B_1.

9. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник наименьшего периметра.

source:approaching/geometry-plane-motion.tex

Оценка + пример

1. Сто первых натуральных чисел в каком-то порядке записали в ряд и вычислили 98 сумм, получаемых при сложении троек подряд идущих чисел. Какое наибольшее число нечетных сумм могло при это получится?

2. В пять горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил три килограмма мёда (необязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни-Пух может одновременно взять только два горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество мёда сможет гарантированно взять и съесть Винни-Пух?

3. В каждую клетку прямоугольника 10×19 записали одно из чисел 0 или 1, после чего подсчитали суммы цифр в каждой строке и в каждом столбце. Какое наибольшее количество различных чисел могло получится?

4. Сумма нескольких натуральных чисел, в записи которых присутствуют только 0 и 3, равна 55 … 55 (2016 пятерок). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?

5. Каждую грань кубика разбили на четыре одинаковых квадрата, а затем раскрасили эти квадраты в несколько цветов так, что квадраты, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в разные цвета. Какое наибольшее количество квадратов одного цвета могло получится?

6. Какое наименьшее число круглых фишек диаметром $\sqrt{2}$ можно расставить на доске размером 7×7 клеток (длина стороны каждой клетки равна 1) так, чтобы внутри каждой клетки хотя бы одна точка была накрыта некоторой фишкой?

7. Из клетчатого квадрата $(n^2+1)\times(n^2+1)$ вырезали клетчатый квадрат $(n^2-1)\times(n^2-1)$ с тем же центром. На какое наименьшее число кусков нужно разрезать (по границам клеточек) образовавшуюся каемку так, чтобы из них можно было сложить квадрат $2n \times 2n$?

source:approaching/combinatorics-two-sided-estimate-2.tex

Разнобой по региону

1. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли ее соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

3. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

4. В языке племени АУ две буквы — «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причем в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

5. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звездочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звездочек, потом Вася — любую из двух оставшихся, а затем Петя — оставшуюся звездочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2016?

6. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 2^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 2^m быть равной 6?

7. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через произвольную точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

8. Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a. Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

9. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

ММО. Комбинаторная геометрия

1. Будем называть *змейкой* ломаную, у которой все углы между соседними звеньями равны, причем для любого некрайнего звена соседние с ним звенья лежат в разных полуплоскостях от этого звена. Барон Мюнхгаузен заявил, что отметил на плоскости 6 точек и нашел 6 разных способов соединить их (пятизвенной) змейкой (вершины каждой из змеек — отмеченные точки). Могут ли его слова быть правдой?

2. Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)?

3. Назовем точку на плоскости *узлом,* если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что среди узлов внутри треугольника можно выбрать такие два узла, что проходящая через них прямая содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон треугольника.

4. Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X — треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади черной части и равна S.

source:approaching/combinatorics-geometrical-mmo.tex

Комбинаторная геометрия. Добавка

1. Существует ли шестиугольник, который можно разбить одной прямой на четыре равных треугольника?

2. На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары, после чего соединяет точки в каждой из пар отрезком. Всегда ли он может это сделать так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

3. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в черный и белый цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая — конечное число черных?

4. Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нем для любого числа S найдутся прямоугольники суммарной площади больше S.
(a) Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?
(b) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.

source:approaching/combinatorics-geometrical-mmo-more.tex

Разнобой

1. Решите в целых числах уравнение $3^x = 7x^2 - 6y^3$.
2. Алёша написал на доске пять целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стер одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5. Восстановите стертое число.
3. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.
4. Какое наименьшее количество трехклеточных уголков можно разместить в квадрате 8×8 так, чтобы в этот квадрат больше нельзя было поместить ни одного такого уголка?
5. Для всякого положительного x докажите неравенство $2x + 3/8 \geqslant \sqrt[4]{x}$.
6. Гидры состоят из голов и шей (каждая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить ее на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более, чем N ударов.

source:approaching/mixture-1.tex

Подготовка к олимпиаде по геометрии

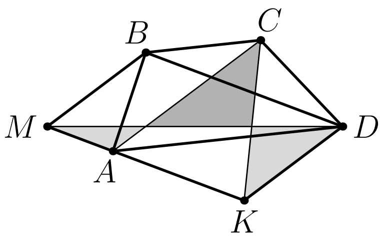
1. Докажите, что любой жесткий плоский треугольник T площади меньше четырех можно просунуть сквозь треугольную дырку Q площади 3.
2. Прямая a пересекает плоскость α. Известно, что в этой плоскости найдутся 2011 прямых, равноудаленных от a и не пересекающих a. Верно ли, что a перпендикулярна α?
3. $ABCDE$ – правильный пятиугольник. Точка B' симметрична точке B относительно прямой AC. Можно ли пятиугольниками, равными $AB'CDE$, замостить плоскость?
4. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ равна какой-то стороне?
5. На плоскости проведены шесть прямых. Известно, что для любых трех из них найдется четвертая из этого же набора прямая, такая что все четыре будут касаться одной окружности. Обязательно ли все шесть прямых касаются одной и той же окружности?
6. Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?
7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Касательные к окружности в точках A и C и прямая, симметричная BD относительно точки O, пересекаются в одной точке. Докажите, что произведения расстояний от O до противоположных сторон четырехугольника равны.
8. Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.
9. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC; окружности описанные около треугольников ABC и A_1B_1C, вторично пересекаются в точке P, Z — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведенных в точках A и B. Докажите, что прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

source:approaching/geometry-mixture-3.tex

Еще геометрия

1. Каждый из двух подобных треугольников разрезали на два треугольника так, что одна из получившихся частей одного треугольника подобна одной из частей другого треугольника. Верно ли, что оставшиеся части тоже подобны?

2. Трапеция $ABCD$ и параллелограмм $MBDK$ расположены так, что стороны параллелограмма параллельны диагоналям трапеции. Докажите, что площадь темно-серой части равна сумме площадей светло-серых частей.



3. Можно ли правильную треугольную призму разрезать на две равные пирамиды?

4. В треугольнике ABC угол A равен 120°. Докажите, что расстояние от центра описанной окружности до ортоцентра равно $AB + AC$.

5. Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC, причем $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки касания вписанной окружности со стороной BC на прямую AC, проходит через центр вписанной окружности треугольника A_1B_1C.

7. Существует ли многогранник, у которого отношение площадей любых двух граней не меньше 2?

source:approaching/geometry-mixture-3-more.tex

Деревья

Дерево — связный граф без циклов.

1. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

2. Докажите, что из связного графа можно выкинуть несколько ребер так, чтобы осталось дерево.

3. Докажите, что в дереве с n вершинами ровно $(n-1)$ ребер.

4. Вершина называется *висячей,* если из нее выходит ровно одно ребро. Докажите, что в дереве не меньше двух висячих вершин.

5. Докажите, что в связном графе из n вершин не меньше $(n-1)$ ребер.

6. Докажите, что для любого набора чисел $0 < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ такого, что $d_1 + \ldots + d_n = 2n-2$, найдется дерево, где степени вершин будут $d_1, \ldots, d_n$.

7. А единственно ли дерево из предыдущей задачи?

8. Может ли у графа быть ровно два остовных дерева?

9. В группе каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.

10. В дереве все вершины были занумерованы числами от 1 до n. Нумерацию поменяли, но оказалось, что если вершины i и j смежны, то они и раньше были смежны. Докажите, что найдется либо вершина, номер которой не изменился, либо ребро, у которого набор номеров концов остался таким же.

11. В графе есть остовное дерево с m висячими вершинами и остовное дерево с n висячими вершинами. Докажите, что для всякого k такого, что $m < k < n$, найдется остовное дерево с k висячими вершинами.

source:approaching/combinatorics-graph-tree.tex

Квадратим квадратные квадраты

Теорема. Натуральное число n представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда все его простые делители вида $4k+3$ входят в четных степенях.

Лемма 1. Пусть $p > 2$ — простое число. Сравнение $x^2 \equiv -1 \pmod p$ разрешимо тогда и только тогда, когда $p = 4k+1$.

1. Пусть x — остаток по модулю p. Рассмотрим четверку чисел $x, -x, x^{-1}, -x^{-1}$. Докажите, что различные четверки не пересекаются.

2. Бывает ли так, что внутри четверки некоторые числа совпадают? В каких случаях это может произойти? Рассмотрите все варианты.

3. Посчитайте все четверки чисел по модулю p для случаев $p = 4k+1$ и $p = 4k+3$. Докажите лемму 1.

Лемма 2. Пусть $p = 4k+1$. Тогда при некоторых a и b выполняется $p = a^2 + b^2$.

Пусть $s^2 \equiv -1 \pmod p$, $M = \{0, 1, 2, \ldots, [\sqrt{p}]\}$, $x, y \in M$.

4. Докажите, что количество различных пар чисел (x, y) больше p.

5. Докажите, что при некоторых x_1, y_1, x_2, y_2 выполнено $x_1 + sy_1 \equiv x_2 + sy_2 \pmod p$.

6. Пусть $a = x_1 - x_2$, $b = y_1 - y_2$. Докажите, что $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod p$.

7. Докажите, что $a^2 + b^2 = p$.

Лемма 3. Пусть некоторые m, n представимы в виде суммы двух квадратов. Тогда их произведение $m \cdot n$ тоже представимо.

8. Рассмотрим два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$. Чему равно их произведение? Чему равно произведение $|z_1|^2 \cdot |z_2|^2$? Докажите лемму 3.

Лемма 4. Пусть $n = a^2 + b^2$, $p = 4k+3$, $p \mid n$. Тогда $p \mid a$ и $p \mid b$.

9. Воспользуйтесь леммой 1 и докажите лемму 4.

10. **Следствие.** Пусть $n = a^2 + b^2$, $p = 4k+3$, $p \mid n$. Тогда $p^2 \mid n$.

11. При помощи лемм 2–4 докажите теорему.

source:approaching/algebra-number-theory-prime-4kp1.tex

Многочлены с целыми коэффициентами

1. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

2. **(a)** Докажите, что если многочлен $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами принимает при пяти целых значениях x значение 7, то он не может принимать значение 14 ни при каком целом значении x.
   (b) То же самое при четырех значениях.

3. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

4. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + \ldots + P(n)$ делится на k.

5. **(a)** Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.
   (b) Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.
   (c) Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, для которого множество простых делителей ненулевых значений в целых точках конечно.

6. Дано n чисел, p — их произведение. Разность между p и каждым из этих чисел — нечетное число. Докажите, что все данные n чисел иррациональны.

`source:outrunning/algebra-polynomial-integer.tex`

Многочлены с целыми коэффициентами. Добавка

1. Даны взаимно простые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что существует натуральное число C такое, что для любого целого n верно $(P(n), Q(n)) < C$.

2. Существует ли многочлен с отрицательным коэффициентом, все натуральные степени (выше первой) которого имеют положительные коэффициенты?

3. Докажите, что для любого многочлена степени хотя бы 2 существует арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ такая, что для любого её члена a_i уравнение $P(x) = a_i$ не имеет целых корней.

Графы. Связность

1. В графе на n вершинах степень каждой не меньше $n/2$. Докажите, что этот граф связен.

2. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека все еще не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

3. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более:
   (a) 198 перелетов; **(b)** 196 перелетов.

4. В связном графе на 100 вершинах 199 ребер. Докажите, что можно удалить все ребра некоторого цикла так, чтобы граф остался связен.

5. В стране n городов, некоторые пары из которых соединены непересекающимися дорогами. Известно, что из любого города можно добраться по дорогам до любого другого, причем единственным способом (если не проезжать по одной дороге более одного раза). Докажите, что министр может объявить не более, чем $n/51$ городов закрытыми (и запретить въезд в них и выезд из них) так, чтобы после этого для любой пары городов X, Y выполнялось одно из двух условий: либо из X нельзя добраться до Y, либо из X можно добраться до Y, проехав не более, чем по 49 дорогам.

6. Известно, что в графе G из вершины u в вершину v можно добраться при удалении любой другой вершины G. Докажите, что между u и v есть два непересекающихся пути.

7. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p, либо q человек. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну между гостями, если:
   (a) p и q взаимно просты;
   (b) p и q имеют наибольший общий делитель d?

source:outrunning/combinatorics-graph-connectivity.tex

Движения плоскости

1. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2. Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2. Эти отрезки пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2. Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

2. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE (точка C лежит на отрезке AE). Точки M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM — равносторонний.

3. **Лемма Архимеда.** Пусть A и B — фиксированные точки окружности S. Выберем одну из дуг окружности S с концами A и B и рассмотрим произвольную окружность, касающуюся отрезка AB и выбранной дуги. Обозначим точки касания через P и Q соответственно. Докажите, что все прямые PQ пересекаются в одной точке.

4. **Точка Торричелли.** Пусть T — такая точка плоскости, что сумма расстояний от нее до вершин данного остроугольного треугольника минимальна. Докажите, что все стороны треугольника видны из нее под углом 120°.

5. Окружность пересекает стороны AC, BC и AB положительно ориентированного треугольника ABC в точках B_2 и B_1, A_2 и A_1, C_1 и C_2 (в порядке обхода по часовой стрелке). Оказалось, что перпендикуляры к сторонам AC, BC и AB, восстановленные в точках B_2, A_1 и C_1 соответственно, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к тем же сторонам, восстановленные в точках B_1, A_2 и C_2, также пересекаются в одной точке.

6. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит
(a) 0,34; **(b)** 0,287.

source:outrunning/geometry-plane-motion.tex

Добавка по движениям

1. Четырехугольник вписан в квадрат. Докажите, что периметр четырехугольника больше удвоенной диагонали квадрата.

2. Докажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.

3. **(a)** На сторонах произвольного треугольника внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.
(b) Докажите аналогичное утверждение для треугольников, построенных внутренним образом.
(c) Докажите, что разность площадей правильных треугольников, полученных в пунктах (a) и (b), равна площади исходного треугольника.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.

source:outrunning/geometry-plane-motion-more.tex

Графы. Добавка про деревья

1. Доказать, что в дереве пересечение поддеревьев является поддеревом.

2. Докажите, что вершины любого дерева можно покрасить в два цвета таким образом, чтобы смежные вершины имели разные цвета.

3. Есть n коробок, к каждой лежит по одному утюгу, все утюги — разные. У вас есть кнопки, на которых написано «поменять местами содержимое i-ой и j-ой коробки».
(a) Докажите, что можно выбрать такие $(n-1)$ кнопок, чтобы используя только их можно было бы реализовать любую перестановку утюгов;
(b) Докажите, что меньшим числом кнопок обойтись нельзя.

4. В группе людей каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.

5. В связном графе есть остовное дерево с m висячими вершинами и с n висячими вершинами. Докажите, что для любого k такого, что $m < k < n$, в этом графе найдется остовное дерево с k висячими вершинами.

source:outrunning/combinatorics-graph-tree.tex

Разнобой

1. Докажите, что доску 12×12 можно разрезать на прямоугольники 1×2 более, чем 10^{14} способами.

2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AC + BD = 20$, $AB + CD = 12$. Какое наибольшее значение может принимать площадь четырехугольника $ABCD$?

3. Дано натуральное число n и набор различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, каждое из которых не превосходит n^2. Докажите, что в множестве попарных разностей этого набора какое-то ненулевое число встретится не менее трех раз.

4. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, что для любого натурального n выполнено соотношение $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}$?

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) провели такую чевиану AX, что радиус вписанной в треугольник ABX окружности равен радиусу вневписанной в треугольник ACX окружности, касающейся отрезка CX. Докажите, эти радиусы равны четверти длины высоты треугольника ABC, опущенной на боковую сторону.

6. Найдите максимальное количество ребер в графе на $n \geqslant 6$ вершинах, где любые два цикла имеют общую вершину.

source:outrunning/mixture-1.tex

Корней много не бывает!

1. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трехчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трехчлена.

2. Опишите многочлены $f(x)$ степени не выше 3, которые удовлетворяют условиям: $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 3$.

3. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

4. Про многочлен $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_0$ известно, что
$$f(1) = f(-1)\,, \quad \ldots\,, \quad f(5) = f(-5)\,.$$
Докажите, что $f(x) = f(-x)$ для любого действительного x.

5. Многочлен $p(x, y)$ равен нулю во всех целых точках. Докажите, что он равен нулю.

6. Докажите, что не существует никакой (даже разрывной) функции $y = f(x)$, что $f(f(x)) = x^2 - 1996$ при всех x.

7. Даны два различных приведённых кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ и $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

source:outrunning/algebra-polynomial-roots.tex

Cherchez la racine

1. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

2. Докажите, что при умножении многочлена $(x+1)^{n-1}$ на любой многочлен, отличный от нуля, получается многочлен, имеющий не менее n отличных от нуля коэффициентов.

3. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

4. Дан многочлен нечетной степени $P(x)$. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

5. Какое наибольшее количество нулевых коэффициентов может быть у многочлена степени n, имеющего n различных действительных корней?

source:outrunning/algebra-polynomial-odd-degree.tex

Теорема Шаля

1. Чему равна композиция
(a) двух поворотов? **(b)** двух симметрий?
(c) симметрии и поворота?
(d) симметрии и параллельного переноса?
(e) поворота и параллельного переноса?
(f) двух центральных симметрий?

2. Докажите, что любое движение однозначно задается образами трех неколлинеарных точек.

3. Докажите, что всякое собственное движение плоскости является или поворотом, или параллельным переносом.

4. Докажите, что всякое несобственное движение плоскости является скользящей симметрией.

5. На плоскости имеется многоугольник с нечетным числом сторон. Точку M последовательно отражают относительно середин сторон многоугольника, получается точка N. Докажите, что середина MN является вершиной многоугольника.

6. Докажите, что любое движение является композицией не более, чем трех симметрий.

7. Дан треугольник ABC. Постройте точки K, L и M такие, чтобы треугольники AKM, BLK и CLM были правильными.

8. На плоскости нарисованы два равных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, причем направление обхода вершин у них разное. Докажите, что середины отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой.

9. Стороны выпуклого четырехугольника проходят через вершины параллелограмма. Известно, что три из них делятся этими вершинами пополам. Докажите, что четвертая тоже делится пополам.

10. Дан треугольник ABC. Произвольная точка плоскости M последовательно отражается относительно прямых AB, AC и BC. Результат этого действа обозначим через $T(M)$. Найдите множество точек M таких, что расстояние между M и $T(M)$ минимально.

`source:outrunning/geometry-chasles-theorem-2d.tex`

Задачи от Андрея с подробностями

1. Даны 5 гирь попарно различной массы. Про любые 3 гири A, B и C можно спросить: «Верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$?» и узнать верный ответ. Всегда ли за 9 вопросов можно упорядочить все гири?

2. Двое играют в крестики-нолики на клетчатой плоскости, причем за один ход первый ставит крестик, а второй четыре нолика. Первый выиграет, если ему удастся поставить три крестика в ряд. Может ли второй ему помешать?

3. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали Андрею и Лёше по 3 карты, а оставшуюся карту

(a) спрятали; **(b)** отдали Глебу.

Андрей и Лёша могут по очереди сообщать вслух любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом Глеб не смог вычислить местонахождение ни одной из тех карт, которых он не видит? (Андрей и Лёша не договаривались о каком-либо особом способе общения; все переговоры происходят открытым текстом).

4. Есть n гномов и злобная Белоснежка. Каждый день перед выходом на работу она надевает на каждого гнома колпак одного из двух цветов. Каждый гном видит колпаки других, но не видит свой. Потом все гномы одновременно говорят, какого цвета на них колпак по их мнению. Если хотя бы один ошибся — все идут работать на рудники. Как гномам договориться так, чтобы с вероятностью 0,5 не работать?

5. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2015 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

6. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

7. Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по положительному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; иначе из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков?

8. Придумайте, как закодировать 4 бита информации в сообщение из 7 бит, так чтобы ошибку в каком-то одном бите можно было выявить и исправить.

source:outrunning/combinatorics-information.tex

Инвариант

1. На доске написано число 1234. Разрешается к числу либо прибавить по единице к двум соседним цифрам, либо вычесть по единице (если среди них нет девяток, нулей соответственно). Можно ли получить число 2013?

2. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них число $ab+a+b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

3. Какое максимальное количество диагональных ходов может совершить король, обойдя всю шахматную доску по пути без самопересечений? (Король ходит на любую соседнюю клетку по стороне или вершине)

4. Муравей ползает по замкнутому маршруту по ребрам додэкаэдра, нигде не разворачиваясь назад. Маршрут проходит ровно по два раза по каждому ребру. Докажите, что некоторое ребро муравей проходит оба раза в одном и том же направлении.

source:outrunning/combinatorics-invariant.tex

Полуинвариант

1. Таблица 15×15 заполнена плюсами и минусами. Разрешается выбрать любую строку или любой столбец и поменять все стоящие там знаки на противоположные. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце плюсов было больше, чем минусов.

2. На плоскости дано $2N$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, N из них окрашены в красный цвет, остальные в синий. Докажите, что эти точки можно соединить N непересекающимися отрезками, каждый из которых будет соединять красную точку с синей.

3. По окружности расставлены n чисел. Если подряд стоят числа a, b, c и d и при этом $(a-d)(b-c) > 0$, то числа b и c разрешается поменять местами. Докажите, что через несколько шагов нам не удастся произвести ни одной такой перестановки.

4. На окружности сидят 12 кузнечиков в различных точках. Эти точки делят окружность на 12 дуг. Отметим 12 середин этих дуг. По сигналу кузнечики одновременно прыгают, каждый — в ближайшую по часовой стрелке отмеченную точку. Снова образуются 12 дуг, прыжки в середины дуг повторяются и т. д. Может ли хотя бы один кузнечик вернуться в свою исходную точку после того, как им сделано

(a) 12 прыжков? **(b)** 13 прыжков?

5. Шахматная доска разбита на доминошки. К правой верхней клетке добавлена одна клетка справа (первая строка состоит из 9 клеток, остальные — из 8). Разрешается вынимать любую доминошку и класть ее на две пустые соседние клетки. Докажите, что все доминошки можно расположить горизонтально.

source:outrunning/combinatorics-semi-invariant.tex

НОДы и НОКи

1. Для натуральных a и b выполнено $\text{НОД}(a,b)+\text{НОК}(a,b)=a+b$. Докажите, что из этих двух чисел одно делится на другое.
2. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите, что $a > pq/\big(2(p+q)\big)$.
3. Найдите все натуральные a и b такие, что
$$\text{НОК}(a,b)-\text{НОД}(a,b)=\frac{ab}{5}\,.$$
4. Натуральные числа a и b таковы, что $a\cdot\text{НОД}(a,b)+b\cdot\text{НОК}(a,b)<2{,}5ab$. Докажите, что a делится на b.
5. Даны натуральные числа a и b такие, что $(a+1)/b+(b+1)/a$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит числа $\sqrt{a+b}$.
6. a и b — различные натуральные числа такие, что, $ab(a+b)$ делится на a^2+ab+b^2. Докажите, что $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$.
7. Докажите, что если $\text{НОК}(a,a+5)=\text{НОК}(b,b+5)$, то $a=b$.
8. Могут ли $\text{НОК}(a,b)$ и $\text{НОК}(a+c,b+c)$ быть равны?
9. Пусть m и n взаимно просты. Выразите $\text{НОД}(5^n+7^n,5^m+7^m)$ через m и n.
10. Для любых натуральных чисел m и n $(n>m)$ докажите неравенство
$$\text{НОК}(m,n)+\text{НОК}(m+1,n+1)>2mn/\sqrt{n-m}\,.$$

source:outrunning/algebra-gcd-and-lcm.tex

Рациональное и иррациональное

1. Докажите, что число **(a)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **(b)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ иррационально.

2. Докажите, что если число $(a+b\sqrt{2})$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то число $(a-b\sqrt{2})$ является корнем того же многочлена.

3. Число $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Найдите еще три числа, являющиеся корнями того же многочлена.

4. Докажите, что число $14+10\sqrt{2}$ не может быть представлено в виде $(a+b\sqrt{2})^2$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

5. Существует ли α такое, что $\cos(\alpha)$ иррационально, а $\cos(2\alpha)$, $\cos(3\alpha)$, $\cos(4\alpha)$ и $\cos(5\alpha)$ рациональны?

6. Число $\alpha = 0{,}12457\ldots$ определено следующим образом: n-я цифра после запятой равна первой цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что α — иррациональное число.

7. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.

8. Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка?

9. Пусть α и β — иррациональные числа, причем $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Докажите, что последовательности $[n\alpha]$ и $[n\beta]$ покрывают весь натуральный ряд без перекрытий.

source:outrunning/algebra-irrational.tex

Геометрический разнобой

1. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что H лежит на биссектрисе угла CAB.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1. На стороне AB выбрана точка K так, чтобы $BK = BA_1$. Биссектриса угла C пересекает A_1K в точке P. Докажите, что $PA = PA_1$.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Касательная к ω_1 в точке B пересекает второй раз ω_2 в точке P. Касательная к ω_2 в точке B пересекает второй раз ω_1 в точке Q. Прямая QA второй раз пересекает ω_2 в точке R. Докажите, что $BR = BP$.

4. Пусть A, B и C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B. Из точки P, лежащей на прямой b, опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $AC \perp A_1C_1$.

5. На сторонах треугольника ABC во внешнюю границу, как на основаниях, построены равнобедренные треугольники BCD, CAE и ABF. Докажите, что прямые, проходящие через точки A, B и C перпендикулярно EF, FD и DE соответственно, пересекаются в одной точке.

6. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точка M — это середина стороны AD, $\angle BMC = 90°$, $\angle BAD = \angle BCM$. Докажите, что тогда прямые AB и CD пересекаются под прямым углом.

7. На плоскости отмечены два отрезка. Найдите ГМТ точек плоскости, из которых эти отрезки видны под равными углами.

source:outrunning/geometry-mixture-1.tex

Неравенства

1. Про неотрицательные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ с суммой 2015 известно, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_{2015}$. Найдите наименьшее значение величины $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2015}$.

2. Докажите, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше, чем среднее арифметическое их среднего геометрического и среднего квадратического.

3. a, b, c — стороны треугольника с периметром 1. Докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} \geqslant 12\,.$$

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a + b + c + abc = 4$. Докажите неравенство

$$\left(1 + \frac{a}{b} + ca\right)\left(1 + \frac{b}{c} + ab\right)\left(1 + \frac{c}{a} + bc\right) \geqslant 27\,.$$

5. Даны натуральные числа m и n. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geqslant 1\,.$$

6. Сумма квадратов неотрицательных чисел a, b, c равна 48. Докажите неравенство

$$a^2\sqrt{2b^3+16} + b^2\sqrt{2c^3+16} + c^2\sqrt{2a^3+16} \leqslant 576\,.$$

7. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 2. При $n \geqslant 4$ докажите неравенство

$$\frac{x_1}{1+x_2^2} + \frac{x_2}{1+x_3^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2} \geqslant \frac{3}{2}\,.$$

source:outrunning/algebra-inequality.tex

Еще неравенства

1. Докажите, что если x, y и z — длины сторон треугольника, то

$$xyz \geqslant (x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)\,.$$

2. Докажите неравенство $n^n > 2^{n-1} \cdot n!$.

3. a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+2ac}{a^2+c^2} + \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 3\,.$$

4. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что если

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x+y+z\,,$$

то для любого натурального k выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geqslant x^k+y^k+z^k\,.$$

source:outrunning/algebra-inequality-more.tex

Разнобой

1. На столе лежат картинками вниз 8 игральных карт. Вы можете указать на любую группу карт (в частности, на одну карту, или, например, на все 8) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Можно ли при помощи 5 вопросов узнать число бубновых карт, лежащих на столе?

2. Ожерелье состоит из 100 синих и некоторого количества красных бусин, нанизанных на нить в форме окружности. Известно, что на любом отрезке ожерелья, содержащем 8 бусин, есть не менее 5 красных. Какое наименьшее количество красных бусин может быть в ожерелье?

3. $P(x)$ — квадратный трехчлен. Какое наибольшее количество членов, равных сумме двух предыдущих членов, может быть в последовательности

$$P(1), P(2), P(3), \dots \ ?$$

4. В клетках таблицы 10×100 написаны целые числа. Разрешается выбрать любую клетку и вычесть из стоящего в ней числа количество соседних по стороне клеток, а к числам, стоящим в соседних клетках, прибавить по 1. Всегда ли из таблицы, сумма чисел в которой равна 0, такими операциями можно получить таблицу, целиком заполненную нулями?

5. На высотах треугольника ABC отложили отрезки AA_1, BB_1, CC_1, равные диаметру вписанной окружности (высота — это отрезок). Эта окружность касается сторон BC, AC, AB в точках A', B', C'. Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в одной точке.

6. Дано натуральное число n. Рассмотрим все наборы целых неотрицательных чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{такие, что} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = n - 1.$$

Найдите наибольший общий делитель всех произведений вида

$$C_n^{x_1} \cdot C_n^{x_2} \cdot \dots \cdot C_n^{x_n} \, .$$

source:outrunning/mixture-2.tex

Игры

1. Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

2. Двое поочередно располагают доминошки на доске $m \times n$, где mn четно. Первый кладет доминошки всегда вертикально, второй — горизонтально. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для всяких m и n определите, кто выигрывает при правильной игре?

3. Двое поочередно пишут на доске 5×5 что-то. Первый — крестики, второй — нолики. Первый выиграет, если напишет пять крестиков в ряд, второй — если ему помешает. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Двое играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой бумаге по таким правилам: первый ставит два крестика, второй — нолик, первый — снова два крестика, второй — нолик и т. д. Первый выигрывает, когда на одной вертикали или горизонтали стоит рядом k крестиков. Докажите, что первый всегда может добиться победы.
(a) $k = 6$. **(b)** $k = 100$.

5. Двое поочередно пишут на доске 5×5 что-то. Первый — единички, второй — нули. Когда доска заполнится, подсчитывают сумму чисел в каждом квадрате 3×3, максимум из этих чисел объявляется выигрышем первого. Какой максимальный выигрыш может он себе обеспечить?

6. Двое поочередно пишут S или O в полоску 1×2000. Выигрывает тот, кто первым напишет SOS. Докажите, что второй выиграет при правильной игре.

source:outrunning/combinatorics-games.tex

Стереометрия

1. Основания трех высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан противоположных граней. Докажите, что все ребра пирамиды равны.

2. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объемов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объемов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

3. Назовем прямую, проходящую через середины скрещивающихся ребер тетраэдра, *хорошей* средней линией тетраэдра, если она образует равные углы с четырьмя прямыми, содержащими остальные ребра тетраэдра. Докажите, что тетраэдр правильный, если хотя бы две его средние линии хорошие.

4. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины ребер SA, SB, SC и SD пирамиды $SABCD$. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

5. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — соответственно середины ребер SA, SB, SC, SD четырехугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырехугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

6. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две непараллельные треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырехугольники ABB_1A_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1. Докажите, что плоскость, проведенная через точки пересечения диагоналей четырехугольных граней, содержит прямую пересечения плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$.

7. Пусть $ABCD$ — тетраэдр, ω — сфера, касающаяся всех его ребер. Две точки касания сферы ω с ребрами тетраэдра $ABCD$ соединим отрезком тогда и только тогда, когда они лежат на одной грани тетраэдра. Докажите, что сумма всех таких отрезков меньше, чем $3(AI + BI + CI + DI)$, где I — центр сферы ω.

source:outrunning/geometry-stereometry.tex

Комбинаторная стереометрия

1. Существует ли треугольная пирамида, каждое ребро основания которой видно из середины противолежащего бокового ребра под прямым углом?

2. Боковое ребро четырехугольной пирамиды назовем *хорошим,* если медианы двух содержащих его граней, проведенные в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковых ребра — хорошие, то четвертое боковое ребро также является хорошим.

3. Назовем *кубоподобным* многогранник, имеющий шесть граней и восемь вершин, в каждой из которых сходятся по три грани, каждая грань при этом — четырехугольник. Докажите, что если отрезки, соединяющие точки пересечения диагоналей противоположных граней кубоподобного многогранника пересекаются в одной точке, то отрезки, соединяющие противоположные вершины (главные диагонали), также пересекаются в одной точке.

4. В выпуклом многоугольнике P_1 содержится выпуклый многоугольник P_2. Докажите, что при любой гомотетии относительно точки $x \in P_2$ с коэффициентом $k = -1/2$ по крайней мере одна вершина P_2 не выйдет за пределы P_1.

5. Найдите геометрическое место точек P, лежащих внутри куба $ABCDA'B'C'D'$, для которых в каждую из шести пирамид $PABCD$, $PABB'A'$, $PBCC'B'$, $PCDD'C'$, $PDAA'D'$, $PA'B'CD'$ можно вписать в сферу.

6. Каждую грань тетраэдра можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что весь тетраэдр можно поместить в шар радиуса $3\sqrt{2}/4$.

7. В пространстве расположены четыре попарно скрещивающиеся прямые. Докажите, что найдется полуплоскость, границей которой является одна из этих прямых, не пересекающаяся с остальными тремя прямыми.

source:outrunning/geometry-stereometry-combinatorial.tex

Графы. Кто ищет — тот всегда найдёт!

1. Куб $n \times n \times n$ разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$. Какое минимальное количество граней 1×1 необходимо в нем убрать, чтобы из любой его части можно было пробраться наружу?

2. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

3. На плоскости нарисовано n кругов, причем любые два круга не пересекаются, но могут касаться. Каково максимальное количество точек касания?

4. Из клетчатой доски, раскрашенной шахматным образом, вырезана связная (по сторонам клеток) фигура, содержащая n черных клеток.

(a) Сколько максимум у нее может быть белых клеток?

(b) У фигуры ровно $3n$ белых клеток. Докажите, что ее можно разрезать на четырехклеточные буквы «Т».

5. N^3 единичных кубиков просверлены по диагонали и плотно нанизаны на нить, после чего нить связана в кольцо (т. е. вершина первого кубика соединена с вершиной последнего). При каких N из получившегося «ожерелья» можно сложить куб с ребром N?

6. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

7. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось четное количество фишек.

source:outrunning/combinatorics-graph-hidden.tex

Оценка + пример

1. Число называется *несложным*, если оно является произведением ровно двух простых (быть может, равных). Какое наибольшее количество несложных чисел может идти подряд?

2. На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

3. В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе.

4. Петя красит клетки таблицы $n \times n$ по следующему правилу: если какая-то незакрашенная клетка граничит по стороне с двумя закрашенными, то ее можно закрасить. Какое наименьшее число клеток могло быть закрашено изначально, если известно, что Петя смог закрасить все клетки?

5. Два муравья проползли каждый по своему замкнутому маршруту на доске 7×7. Каждый полз только по сторонам клеток доски и побывал в каждой из 64 вершин клеток ровно один раз. Каково наименьшее возможное число таких сторон, по которым проползали и первый, и второй муравьи?

6. Расстоянием между числами $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ назовем максимальное i, для которого $a_i \neq b_i$. Все пятизначные числа выписаны друг за другом в некотором порядке. Какова при этом минимально возможная сумма расстояний между соседними числами?

7. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить все клетки доски размера 10×10 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находились клетки не более, чем пяти различных цветов?

8. Какое минимальное количество клеток можно закрасить черным в белом квадрате 300×300, чтобы никакие три черные клетки не образовывали уголок, а после закрашивания любой белой клетки это условие нарушалось?

9. За круглым столом сидит компания из тридцати человек. Каждый из них либо дурак, либо умный. Всех сидящих спрашивают: «Кто Ваш сосед справа – умный или дурак?». В ответ умный говорит правду, а дурак может сказать как правду, так и ложь. Известно, что количество дураков не превосходит F. При каком наибольшем значении F всегда можно, зная эти ответы, указать на умного человека в этой компании?

source:outrunning/combinatorics-two-sided-estimate.tex

Предрегиональный разнобой по геометрии

1. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая l_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая l_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые l_1 и l_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных l_1 и l_2.

2. Из вершины B остроугольного треугольника ABC проведены перпендикуляры к сторонам AB и BC до пересечения с прямой AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и PBQ касаются.

3. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.

4. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины противоположных сторон, делит диагонали в одинаковом отношении.

5. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность S_2 в точке M, луч O_2A пересекает окружность S_1 в точке N, а прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F. Докажите, что $AE = AF$.

6. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Докажите, что $IO = IH$, где I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр.

7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что

$$\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ .$$

source:outrunning/geometry-mixture-2.tex

Диван

1. Даны четыре стержня, на один из которых нанизано 21 кольцо, причем кольца отличаются размером и лежат меньшее на большем. За один раз разрешается переносить только одно кольцо, причём нельзя класть большее кольцо на меньшее. За какое наименьшее число ходов можно перенести всю конструкцию на другой стержень.
2. Оцените количество связных помеченных графов на 10 вершинах.
3. Есть коридор шириной 1 метр, поворачивающий под прямым углом. Диван какой максимальной площади можно там перенести?

source:outrunning/sofa-challenge.tex

Конструктивы

1. На столе лежат 100 одинаковых с виду монет, из которых 85 фальшивых и 15 настоящих. В вашем распоряжении есть чудо-тестер, в который можно положить две монеты и получить один из трех результатов — «обе монеты настоящие», «обе монеты фальшивые» и «монеты разные». Как за 64 таких теста найти все фальшивые монеты?

2. В однокруговом турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Спартак одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

3. Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c и d, для которых числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ являются полными квадратами.

4. 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным — другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого — 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?

5. Можно ли вписать правильный октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба? (У правильного октаэдра 6 вершин, из каждой выходит 4 ребра, все его грани — правильные треугольники.)

6. Существует ли выпуклое тело, отличное от шара, такое что его ортогональные проекции на три перпендикулярные плоскости являются окружностями?

7. Существует ли многочлен степени 2013 такой, что его значения в точках $1, 2, \ldots, 2014$ — это различные степени двойки?

`source:outrunning/mixture-constructive.tex`

Комбигеом

1. На плоскости дано 300 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует 100 попарно не пересекающихся треугольников с вершинами в этих точках.

2. Шарообразная планета окружена 25 точечными астероидами. Доказать, что в любой момент на поверхности планеты найдется точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 11 астероидов.

3. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

4. Несколько точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Доказать, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

5. На прямоугольном листе бумаги отмечены
(a) несколько точек на одной прямой; **(b)** три точки.
Разрешается сложить лист бумаги несколько раз по прямой так, чтобы отмеченные точки не попали на линии сгиба, и затем один раз шилом проколоть сложенный лист насквозь. Докажите, что это можно сделать так, чтобы дырки оказались в точности в отмеченных точках и лишних дырок не получилось.

6. Найдите все конечные множества точек на плоскости, обладающие тем свойством, что никакие три точки множества не лежат на одной прямой и вместе с каждыми тремя точками данного множества точка пересечения высот треугольника, образованного этими точками, также принадлежит данному множеству.

7. На плоскости даны n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколькими различными способами это множество точек можно разбить на два непустых подмножества так, чтобы выпуклые оболочки этих подмножеств не пересекались?

8. Имеется набор векторов $v_1, \dots, v_n$ на плоскости такой, что $v_1 + \dots + v_n = 0$. Докажите, что найдется выпуклый многоугольник $A_1 \dots A_n$ такой, что $\overline{A_iA_{i+1}} = v_i$.

`source:outrunning/combinatorics-geometrical.tex`

Бесконечность

1. Дано бесконечное число углов. Докажите, что этими углами можно покрыть плоскость.

2. В стране Фибоначчи есть купюры достоинством 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 лир. У Леонардо есть купюра 55 лир. Каждый день он может пойти в банк и обменять любую имеющуюся у него купюру на любое количество купюр меньшего достоинства. Кроме того, каждый день Леонардо должен тратить 1 лиру на еду. Докажите, что Леонардо сможет существовать сколь угодно долго, но не бесконечно долго.

3. Есть бесконечное дерево, подвешенное за корень. Степень каждой вершины конечна. Докажите, что существует бесконечный путь, идущий от корня вниз.

4. Докажите, что из бесконечной последовательности различных натуральных чисел можно выделить бесконечную возрастающую подпоследовательность.

5. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?

source:outrunning/combinatorics-infinity.tex