Добрые конструктивы

1. Даны 8 гирек весом $1, 2, \dots, 8$ граммов, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

2. Какое наибольшее число городов может быть в стране, если из каждого выходит ровно три дороги, и из каждого города можно попасть в каждый с не более чем одной пересадкой?

3. Барон Мюнхгаузен рассказывал, что у него есть карта страны Оз с пятью городами. Каждые два города соединены дорогой, не проходящей через другие города. Каждая дорога пересекает на карте не более одной другой дороги (и не более одного раза). Дороги обозначены жёлтым или красным (по цвету кирпича, которым вымощены), и при обходе вокруг каждого города (по периметру) цвета выходящих из него дорог чередуются. Могут ли слова барона быть правдой?

4. Приведите пример многогранника и точки вне него таких, чтобы из точки не было видно ни одной вершины многогранника.

5. В группе детского сада $2n$ детей, причем каждый дружит ровно с тремя. Всегда ли сможет воспитательница расставить детей по парам, чтобы в каждой паре дети дружили?

6. (a) На карте авиаперелетов Табулистана злоумышленник стер все названия. Может ли так получиться, что мудрый визирь может однозначно восстановить названия, если он помнит, из какого города в какой были перелеты? (Городов не меньше 10.)

(b) А если из каждого города летает ровно три рейса?

7. Можно ли разрезать круг на несколько равных частей так, чтобы хотя бы одна не содержала его центра?

8. Барон Мюнхгаузен выписал на доску 10 действительных слагаемых, а их сумму записал на листок. За одну операцию он заменял одно или несколько слагаемых на доске на обратные величины, и снова выписывал сумму на листок. Мог ли он в результате 500 таких операций выписать на листок числа $1, 2, \dots, 500$?

9. Можно ли на единичной окружности расставить 2015 точек так, чтобы все попарные расстояния были рациональны?

10. Сумма цифр числа n равна m. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться m^3?