

## Миниразной по неравенствам

1. Сумма положительных чисел  $a, b, c$  равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac.$$

2. Пусть  $a, b, c$  — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

3. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — положительные числа такие, что  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \geq 1$ . Докажите неравенство

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 \geq x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3.$$

4. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

где  $abc = 1$  и  $a, b, c > 0$ .

5. Докажите неравенство

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \dots + a_n b_n c_n)^3 \leq (a_1^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + \dots + c_n^3),$$

где  $a_i > 0, b_i > 0, c_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

6. При любых положительных  $x, y, z$  докажите неравенство

$$x^5 y + y^5 z + z^5 x \geq x^2 y^3 z + y^2 z^3 x + z^2 x^3 y.$$