

## Циферки

1. Натуральное число  $m$  таково, что сумма цифр числа  $8^m$  равна 8. Может ли  $8^m$  оканчиваться на 6?
2. Можно ли при каком-то натуральном  $k$  разбить все натуральные числа от 1 до  $k$  на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?
3. Даны натуральные числа  $M$  и  $N$ , большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр. Кроме того,  $M = 3N$ . Чтобы получить число  $M$ , надо к одной из цифр  $N$  прибавить 2, а ко всем остальным цифрам по нечетной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число  $N$ ? Найти все варианты.
4. На экране компьютера горит число, которое каждую минуту увеличивает-ся на 102. Начальное значение числа 123. Глеб имеет возможность в любой момент изменять порядок цифр числа, находящегося на экране. Может ли он добиться того, чтобы число никогда не стало четырёхзначным?
5. Натуральные числа  $a < b < c$  таковы, что  $b + a$  делится на  $b - a$ , а  $c + b$  делится на  $c - b$ . Число  $a$  записывается 2011 цифрами, а число  $b$  — 2012 цифрами. Сколько цифр в числе  $c$ ?
6. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?
7. Обозначим через  $S(x)$  сумму цифр натурального числа  $x$ . Решить уравнение

$$x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 1993.$$

8. Докажите, что для любого натурального  $n$  существует делящееся на него число, состоящее только ровно из  $n$  единиц и некоторого количества нулей.

Обозначим  $S(n)$  сумму цифр числа  $n$ . Пусть  $a_n$  — такая последовательность чисел, что  $a_{k+1} = S(a_k)$  для любого  $k \geq 0$ . Найдите  $a_6$ , если  $a_0 = 2^{1000000}$ .

9. Обозначим через  $S(m)$  сумму цифр натурального числа  $m$ . Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$  таких, что

$$S(3^n) \geq S(3^{n+1}).$$

10. Глеб написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.