

## Тренировочная олимпиада, 11 класс

1. Какое наименьшее число прямоугольников  $1 \times 2$  клетки нужно закрасить на доске  $8 \times 8$ , чтобы любой квадрат  $2 \times 2$  содержал по крайней мере одну закрашенную клетку?
2. Что больше: число всех цифр в последовательности  $1, 2, 3, \dots, 10^{2014}$  или число всех нулей в последовательности  $1, 2, 3, \dots, 10^{2015}$ ?
3. Табло состоит из нескольких лампочек, каждая из которых может гореть или не гореть. На пульте несколько кнопок, каждая кнопка изменяет состояние определенного множества лампочек. Могло ли оказаться, что на табло можно сделать ровно 100 различных узоров? (Узор — это определенный набор горящих лампочек.)
4. Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник. Окружность, проходящая через точки  $A$  и  $B$ , касается стороны  $CD$  в точке  $E$ ; окружность, проходящая через точки  $B$  и  $C$ , касается стороны  $DA$  в точке  $F$ ; окружность, проходящая через точки  $C$  и  $D$ , касается стороны  $AB$  в точке  $G$ ; окружность, проходящая через точки  $D$  и  $A$ , касается стороны  $BC$  в точке  $H$ . Докажите, что  $EG \perp FH$ .
5. В пространстве даны 80 отрезков  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{80}B_{80}$ , длина каждого из которых больше 1. Докажите, что из них можно выбрать 7 таким образом, что все расстояния  $A_iB_j$  для этих отрезков будут больше 0.3.