

Комбинаторная геометрия и Петер Густав Лежён Дирихле

1. Вершины выпуклого n -угольника ($n > 4$) расположены в узлах сетки. Докажите, что внутри многоугольника есть хотя бы одна целая точка.
2. Фигура S на плоскости имеет площадь больше 1. Докажите, что найдутся такие точки $A, B \in S$, что вектор \overline{AB} имеет целочисленные координаты.
3. Внутри выпуклого стоугольника отмечено k точек ($2 \leq k \leq 50$). Докажите, что можно выбрать $2k$ вершин стоугольника так, что $2k$ -угольник с вершинами них содержит все отмеченные точки.
4. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше $m^2 + 1$ точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдется $m + 1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.