Проверка связи по теории чисел

1. Докажите, что $91! \cdot 1901! - 1$ делится на 1993.

2. Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид $2kp + 1$.

3. Пусть p и q — простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

4. Пусть p и q — последовательные нечетные числа. Докажите, что $p^p + q^q$ делится на $p + q$.

5. Для данного простого p рассмотрим число, в котором сначала идут p единиц, потом p двоек, $\ldots$, потом p девяток. Докажите, что оно сравнимо с 123456789 по модулю p.

6. Докажите, что для простого p длина периода десятичной дроби $\frac{1}{p}$ является делителем числа $(p - 1)$.

7. Докажите, что $3^{2^n} - 1$ (a) делится на 2^{n+2} (b) не делится на 2^{n+3}.

8. Можно ли среди чисел $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$ выбрать пять, произведение которых равнялось бы единице?

9. Через $\sigma(n)$ обозначим сумму делителей числа n. Докажите, что

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) \leqslant n^2$$

10. Докажите, что $(2p - 1)! - p$ делится на p^2.

11. Решите уравнение $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.

12. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.