

Двойной подсчёт. Добавка

1. Дан набор, состоящий из 100 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе положительно.
2. На олимпиаде, в которой было предложено 6 задач, участвовало 2014 школьников. Известно, что для всякой пары задач больше $\frac{2}{5}$ участников решило обе эти задачи, и никто не решил все шесть. Докажите, что хотя бы двое решило по пять задач.
3. Докажите, что для любого натурального n существует турнир на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей (*Турниром* называется полный ориентированный граф. *Гамильтоновым путём* называется путь, проходящий по всем вершинам).
4. В галактическом парламенте есть две фракции — Пузатые и Усатые, по 2014 членов в каждой. Кроме того, в парламенте организован ряд комитетов. Известно, что для любого усатого и любого пузатого найдется комитет, в котором они оба состоят, и каждый депутат состоит не более чем в 100 комитетах. Докажите, что найдется комитет, среди членов которого хотя бы 11 пузатых и 11 усатых.
5. В таблице m строк и n столбцов ($n > m$). В некоторых клетках стоят звездочки, причем в каждом столбце есть хотя бы по одной звездочке. Докажите, что найдется звездочка, с которой в одной строке больше звездочек, чем в столбце.